

逆問題の考え方¹ Concepts of Inverse Problems

久保 司郎² 摂南大学理工学部機械工学科

KUBO, Shiro Department of Mechanical Engineering, Setsunan University

Abstract

Inverse problems deal with identification, estimation, monitoring from observations or measurements. In this paper the role and importance of inverse problems are described. The definition and classification of inverse problems are presented. Inverse analyses are ill-posed in nature. To overcome the ill-posedness the importance of information to be used in the inverse analyses and regularization is described. Examples of inverse problems treated by the present author are presented.

キーワード： 逆問題、同定、推定、モニタリング、不適切性

Keywords： inverse problems, identification, estimation, monitoring, ill-posedness

1. どこにでもある逆問題

社会のインフラストラクチャである水道・ガス・電気の送配達設備、建築物、橋梁、道路、鉄道、発電プラント、化学プラントの多くは、経済の高度成長期に建造されたものである。これらの多くの実用期間は、当初の設計寿命に近づきつつあり、設計寿命を過ぎて使用されているものも少なくない。一方、これらがもつ社会的役割が引き続き大きいため、また重要視されてきている少資源、コスト削減および立地の点から、全面的に新たな代替物を建造することは、事実上不可能である。このため、現存のインフラストラクチャの寿命を延伸し、さらに必要なものに限り部分的に更新できるように管理することが、重要となってきた。電子部品やマイクロ構造体においても、寿命評価と健全性の診断が必要である。

人間の健康と寿命に目を転じると、日本人の平均寿命は、世界的に最高レベルにある。この高い寿命を支えているものは、医療技術の進歩とともに、医療診断技術の進展である。

インフラストラクチャ・機器の診断や医療診断には、各種センシング技術が利用できるものと考えられる。しかし、センシングにより入手できる計測情報そのものでわかることには、限りがある。多くの計測結果を総合することにより、計測結果そのままでは知りえない真に知りたい情報を抽出するためことが求められる。たとえば、人体に対する X 線 CT では、照射方向をさまざまにかえて X 線を照射し、その投影像を得る。この非常に多くの投影像に対して計算を適用することにより断面像を求める。逆問題(inverse

¹ 【原稿受付】 2016 年 8 月 8 日，【掲載決定】 2016 年 10 月 6 日

² 【主著者連絡先】 久保 司郎 摂南大学，教授 e-mail: shi-kubo@mec.setsunan.ac.jp
〒572-8508 大阪府寝屋川市池田中町 17-8，摂南大学理工学部機械工学科

problems)⁽¹⁾⁽¹⁸⁾とは、このように応答や結果などの出力から、原因や入力进行推定するものであり、推定においては逆解析(inverse analysis)が適用される。近年この逆問題の重要性が認識され、種々の分野で逆問題を扱う盛んに取り扱われるようになってきた。本稿では、この逆問題の考え方基礎について論じる。

2. 逆問題の定義と分類

入力を与えると出力が計算できる。たとえば、物体の運動の問題では、物体の質量、初期の位置と速度、作用力がわかっているれば、ニュートンの法則を積分することにより、各時点の物体の位置と速度を求めることができる。物体の初期の位置と速度、作用力を入力としてとらえ、ある時点の物体の位置あるいは速度を出力ととらえることができる。このとき、ある時点の物体の位置から初期の位置や速度を推定するものは、逆問題のひとつである。万有引力のもと、惑星の運動のわずかな変化より、新しい惑星の存在を推定することも逆問題である。

物体中の音の伝播についても逆問題の設定ができる。受信音に影響を及ぼすものは、発信音、受信音を受ける物体表面の状態、物体内の材料・密度分布、受信器の特性、外乱（ノイズ）などである。これら影響因子を受信音から推定するものは、すべて逆問題である。

このように、入力から出力を求める順問題が与えられれば、逆問題を考えることができる。逆問題は、どこにでもあり、多種多様である。

順問題がどのような入力から構成されるかが明らかであれば、逆問題の明確な定義が可能である。すなわち、入力から出力を求める問題を順問題とすると、出力から入力を求めるあらゆる問題が逆問題である。一般には入力は多くある。すべての入力を与えられれば、順方向の手順により出力が決まる。入力の中のいずれが未知であるかによって異なった問題が提起されることになり、それらはすべて逆問題である。

この考え方にしたがって、一つの例として、工学や理学の分野でよく現れる物理量などの空間変化および時間変化を扱う場の解析に関連した逆問題について論じる⁽⁸⁾⁽¹²⁾。

現象あるいは状態を表現している何らかの量を ϕ で表すとき、 ϕ の空間変化あるいは時間変化に関する次の支配微分方程式を用いて、 ϕ の応答を求める順解析が行われる。

$$L(\kappa)\phi = f$$

ここに、 $L(\kappa)$ は材料特性 κ を含んだ作用素、 f は領域内の負荷に相当する項である。

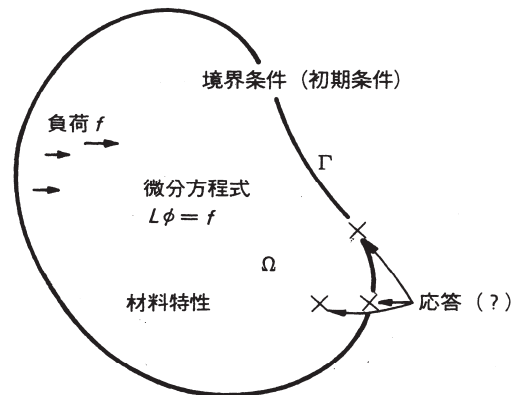
この順解析を実施するためには、図1のように、次のような情報、すなわち入力が不可欠である。

- (a) 対象とする領域 Ω とその境界 Γ の位置と形状
- (b) ϕ に関する場の支配方程式 ($L(\kappa)\phi = f$)
- (c) ϕ あるいはその微係数に関する境界条件 (もし必要があれば初期条件も含む)
- (d) 領域内の負荷 f
- (e) 支配方程式に含まれる材料特性 κ の分布

このように入力には、変数だけでなく、境界条件や支配方程式も含まれる。

もしも、図2のように、これらの要件のいずれかが欠落しておれば、順解析を行うことはできない。上述のように、逆問題は順問題以外のものとする。このとき、場の解析では(a)から(e)までのいずれかに未知のものがあるときに、これらを同定しようとするものが逆問題である。上記(a)から(e)と対応して、以下の逆問題がある。

- (A) 領域／境界逆問題 (領域 Ω の形状あるいは領域内の未知境界を同定する問題)
- (B) 支配方程式逆問題 (ϕ の場を支配している微分方程式を求める問題)

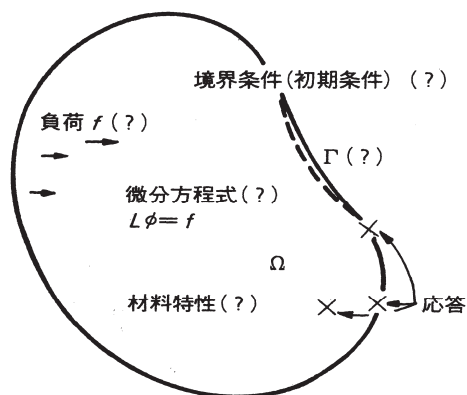


(a) 順問題

- (a) 領域Ωと境界Γ
- (b) 場の支配方程式
- (c) 境界条件 (初期条件) → 応答
(Γ上の未知境界値)
- (d) 負荷 f
- (e) 材料特性
(Ω内の物理量φ)

(b) 順解析

図1 順問題と順解析⁽⁸⁾⁽¹²⁾



(a) 逆問題

- (a) 領域Ωと境界Γの一部 補助情報
- (b) 場の支配方程式
- (c) 境界条件 (初期条件) → (A) 未知境界
- (d) 負荷 f
- (e) 材料特性
- ↑ 応答
(Γ上の過剰な境界値)
(Ω内の物理量φ)

(b) 逆解析の例 (領域/境界逆問題)

図2 逆問題と逆解析⁽⁸⁾⁽¹²⁾

(C) 境界値／初期値逆問題（境界 Γ の一部あるいは全部における境界値、あるいは領域 Ω 内で定義される初期値を求める問題）

(D) 負荷逆問題（領域 Ω の内部で作用している負荷 f を求める問題）

(E) 材料特性逆問題（領域 Ω の内部における材料特性 κ を推定する問題）

場の解析以外の問題についても、順問題が与えられれば同様にして逆問題の分類ができるが、多くの場合に対し、上記の分類があてはまる。このため、この分類はよく用いられている⁽¹³⁾。

3. 逆解析で利用できる情報

逆問題解析では順問題解析に比べて入力不足している。逆問題を解くためには、何らかの追加情報が必要である。この情報として利用できる主なものは、図2(b)に示すように、順解析で解析の対象とした出力、すなわち応答である。この情報を一次情報と呼ぶことにする。一次情報としては、領域内や境界上で得られた ϕ 、その微係数などが考えられ、これらは計測などにより獲得することができる。また、設計問題においては、一次情報は要求性能として与えられる。

境界上で与えられる境界一次情報を用いる場合には、応答が与えられる部分の境界条件は、順問題の境界条件に比べ多い。このような境界条件を過剰規定境界条件、その境界を過剰規定境界と呼ぶ。過剰規定境界を設けることができない場合に対しては、領域の内部において得られる領域内一次情報を用いることが考えられる。

応答以外で逆解析に利用できる情報としては、解の上限、下限などの知見、物理的制約条件、経験などによる先験情報や物理的な制約条件がある。この情報には定性的なものも多いが、逆問題解析には重要な役割を果たす。この情報を、二次情報あるいは補助情報と呼ぶ。

解やその候補が、二次情報を満足するような場合には、それが許容であると呼ぶことにする。二次情報を用いると、解の存在範囲を狭めることができる。

4. 逆問題の不適切性

アダマールによれば、一般に提起された問題が適切である(well-posed)こととは、(1) 解の存在性、(2) 解の一意性および(3) 解の連続性あるいは安定性の三つの要件がすべて満足されていることを表している。これらの要件のうち少なくとも一つが失われている問題は、不適切である(ill-posed)という。順問題とは異なり、通常の場合、逆問題はこのような不適切性を有している。

適切性の三つの要件のうち、解の存在性と一意性がともに成立しているような場合でも、(3)の安定性が失われており、問題が不適切となっていることが多い。たとえば、ラプラスの微分方程式のもとでは変数 ϕ の微小な変動があっても、変動がある部分から離れるにつれ、その影響は急速に減衰する。また、サン・ブナンの原理より、弾性体の変形の問題においても釣合いを満足する力の系が作用してもその影響は空間的に急速に弱まる。逆問題においては、同定の対象とする部分より離れた位置で得られた観測値などを一次情報として用いることが多いため、減衰した観測情報からもとの状態を同定することになる。このため、数値計算上は解くべき方程式が悪条件になり、結果として一次情報に含まれる誤差が著しく拡大されて、推定結果に悪い影響を及ぼす。

このため、解の不安定性を取り除くため、逆解析においては、観測値に含まれる誤差が大きく拡大されるモードや成分を除去したり抑制したりする、いわゆる適切化(regularization)が適用される。

5. 逆問題の例

以上の逆問題の例として、著者がこれまで行ってきた研究をごく簡単に紹介する。

5-1 領域／境界逆問題

構造物や部材の安全性を評価するためには、その中に存在する欠陥やき裂を非破壊的に測定することが必要になる。欠陥やき裂の非破壊計測は、何らかの応答をもとにき裂や欠陥を同定するものである。領域／境界逆問題のひとつである。き裂を有する伝導物体に通電すると、その表面に電気ポテンシャル分布が表れる。き裂の存在によりこのポテンシャル分布に変化が生じる。電気ポテンシャルCT法⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾は、物体表面のポテンシャル分布に対し逆解析を適用することにより、き裂を同定するものである。

上記の電気ポテンシャルCT法は、通電を必要とするいわゆる能動型（アクティブ）検査法である。圧電効果を持つピエゾフィルムを物体表面に貼り付ければ、物体に力が加わったときの物体表面上のひずみ分布に応じて、外部から通電することなく、ピエゾフィルム上に電気ポテンシャル分布が受動的に表れる。き裂があるときのひずみ分布はき裂の影響を受け、ピエゾフィルム上の電気ポテンシャル分布はき裂の位置と寸法を反映したものとなる。受動型電気ポテンシャルCT法⁽²¹⁾⁽²²⁾では、ピエゾフィルム上の電気ポテンシャル分布に対して、逆解析を適用し、き裂を同定する。

鉄構造物の中にき裂が入っている場合や、コンクリートの中に剥離がある場合には、温度応答に違いが生じる。このことを用いて、温度変化をサーモグラフィで計測し、その結果からき裂や剥離を検出し、その大きさを推定することが行われている⁽²³⁾。

5-2 支配方程式逆問題

支配方程式を推定する逆問題として、現象に観測結果をもとに、これを合理的に説明しうる線形微分方程式を求める方法が提案されている⁽²⁴⁾⁽²⁵⁾。この方法では、種々の条件および観測点で観測結果をもとに微係数を評価し、支配微分方程式を推定する問題が、微係数より微分方程式の階数と係数を推定する問題に置き換えられている。

5-3 境界値／初期値逆問題

温度場や電気ポテンシャル場のように、ラプラス方程式が支配する場について、ある境界面の境界条件がまったくわからないときに、他の境界面で過剰に与えられた境界値を用いて未知境界値を推定する問題が取り上げられている⁽²⁶⁾。この問題の数理構造が調べられ、その結果を用いて解を適切化する手法の提案がなされている。

温度変化を繰り返す流体が流れるパイプでは、熱応力の繰返しにより熱疲労が生じることがある。しかしパイプ内部の状態を推定することは一般に困難である。そこで、パイプ外面で観測される温度変化をもとに内部の温度分布の変化を推定することが行われている⁽²⁷⁾⁽²⁸⁾。内部の温度分布から熱応力の変化が求められ、熱疲労寿命の評価ができる。

5-4 負荷逆問題

構造部材の中に不均一な熱ひずみが生じると、熱応力が生じる。この熱応力は、部材の強度や寿命に大きな影響を及ぼす。熱応力のもとになる熱ひずみを推定するものは負荷逆問題の一つであるとみなすことができる。き裂成長が生じると熱応力が再分布する。この再分布した熱応力分布から初期の熱応力分布を推定し、これを用いて残存疲労寿命を推定することが行われている⁽²⁹⁾。

領域内に作用している熱負荷や集中力を推定することが行われている⁽³⁰⁾。この推定のため、随伴境界積分が提案されて、境界上の観測値のみから推定が行われている。

5-5 材料特性逆問題

境界値を種々に変えたときの境界応答をもとに、離散系の材料特性値を推定する逆問題についても逆解析手法の検討が行われている⁽³¹⁾。

6. はじめに逆問題ありき

以上のように見てくると、順問題が自然な問題で、逆問題が異質な問題のようにみえてしまう。しかし、順問題がアプリオリに最初から定義できたわけではない。物体の運動をとってみても、ニュートンの前には、物体の運動を予測することは困難であった。物体の運動を観測し続けても、それをニュートンの法則に昇華することは容易なことではない。運動の法則はもとより、質量や力の概念まで作り出していかなければならないのだから。どこから手を付ければ良いかわからない。私たちが日常的に使っている順問題や順解析は、これまでになされてきた種々の逆問題が解かれてきたものであり、支配法則、力の概念と計測、質量の概念と計測などの連綿たる成果の上になりたっている。そのニュートンの法則でさえ、光速に近い運動では修正を余儀なくされている。

ビッグデータが話題になっている。たとえば、多くの計測情報などを集めると、意外なものとの関係が、法則として見えてくる。これは支配微分方程式ではないが、支配則を求める逆問題と解釈することもできよう。

赤ん坊がこの世に生を受けたとき、彼あるいは彼女の体験を通して何を最初に獲得していくのであろうか。手の感覚が目に見たものと関係していることに気づき、手足の運動と連動するものであろうか。明確な法則のない言語の獲得に至っては、絶望的とすら思えてくる。まわりの人たちが発することばを聞き、何と何に関連するかを次第に理解するようになるのだろうか。膨大な逆問題を解いているように思えてならない。いや、赤ん坊でなくとも新たなものにチャレンジするときは、たえず逆問題を解き続けているのではないだろうか。

7. 融合科学として逆問題

逆問題の対象は、広範囲にわたる。工学分野、理学分野はもとより、考古学における歴史推定、言語学における言語の変遷ですら逆問題である。扱う対象は違っていても、原理的に、あるいは数学的に近いものもある。逆問題が分野を超えて交流し、展開と発展を続けていくことを望むものである。

参考文献

- (1) Tikhonov, A.N., and Arsenin, V.Y., "Solutions of Ill-Posed Problems", (1977), John Wiley & Sons.
- (2) Groetsch, C.W., "The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind", (1984), Pitman.
- (3) Gladwell, G.M.L., "Inverse Problems in Vibration", (1986), Martinus Nijhoff Pub.
- (4) Lavrent'ev, M.M., Romonov, V.G., and Shishat'skii, S.P., "Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis", (1986), Amer. Math. Soc.
- (5) Romanov, V.G., "Inverse Problems of Mathematical Physics", (1987), VNU Sci. Press.

- (6) 久保司郎、大路清嗣、"境界要素法の応用"、(1987)、コロナ社、pp. 181-198.
- (7) 久保司郎、機械の研究、39(1987)、pp.1071-0177.
- (8) Kubo, S., "Inverse Problems Related to the Mechanics and Fracture of Solids and Structures", *JSME Int. J.*, Ser. I, 31-2 (1988), pp.157-166.
- (9) 久保司郎、「材料力学とその関連分野における逆問題」、システム／制御／情報、35-10 (1991)、pp.634-642.
- (10) 日本機械学会(編)、「逆問題のコンピュータアナリシス」、(1991)、コロナ社.
- (11) Yamaguti, M., et al. (ed.), "Inverse Problems in Engineering Sciences", (1991), Springer.
- (12) 久保司郎、「逆問題」、(1992)、培風館.
- (13) Dulikravich, G.S., Martin, T.J., and Dennis, B.H., "Multidisciplinary Inverse Problems", 1999 Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice, (1999), pp.1-8.
- (14) 武者利光、岡本良夫、「逆問題とその解き方」、(1992)、オーム社.
- (15) Kubo, S. (ed.), "Inverse Problems", (1993), Atlanta Technology Pub.
- (16) 久保司郎、「逆に考え、逆に解く」、日本機械学会 100 周年記念出版物 テクノライフ選書、(1997)、オーム社.
- (17) 久保司郎、応用数理、7(1997)、pp. 181-195.
- (18) 登坂宣好、大西和榮、山本昌宏、「逆問題の数理と解法」、(1999)、東京大学出版会.
- (19) 大路清嗣、久保司郎、阪上隆英、「電気ポテンシャルCT法による二次元、三次元き裂形状測定に関する基礎的研究(境界要素逆問題解析法の開発と未知境界(き裂)同定への適用)」、日本機械学会論文集(A編)、51-467 (1985)、pp.1818-1825.
- (20) Kubo, S., Sakagami, T., and Ohji, K., "Electric Potential CT Method Based on BEM Inverse Analyses for Measurement of Three-Dimensional Cracks", *Computational Mechanics '86*, Vol.1, Springer, (1986), pp.V-339-V-344.
- (21) Li, S.-Q., Kubo, S., Sakagami, T., and Liu, Z.-X., "Theoretical and Numerical Investigations on Crack Identification Using Piezoelectric Material-Embedded Structures", *Materials Sci. Research Int.*, JSMS, 6-1 (2000), pp.41-48.
- (22) Shiozawa, D., Kubo, S., and Sakagami, T., "Passive Electric Potential CT Method Using Piezoelectric Material for Crack Identification", *Inverse Problems in Science and Engineering*, 12-1 (2004), pp.71-79.
- (23) Sakagami, T., Izumi, Y., and Kubo, S., "Application of Infrared Thermography to Structural Integrity Evaluation of Steel Bridges", *Journal of Modern Optics*, 57 (2010), pp.1738-1746.
- (24) 久保司郎、大路清嗣、塩尻明夫、「場の支配微分方程式を推定する方法の提案」、日本機械学会論文集(A編)、57-541 (1991)、pp.2250-2256.
- (25) Kubo, S., Fukumoto, K., and Ohji, K., "An Application of the Mollification Method to Estimation of Governing Equation of Field Problem from Noisy Observations", *Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice*, Amer. Soc. Mech. Engrs., (1998), pp.245-252.
- (26) 久保司郎、桑山真二郎、大路清嗣、「ラプラス場における境界値逆問題の数値解析の数理的構造解明と適切化」、日本機械学会論文集(A編)、61-581 (1995)、pp.169-176.
- (27) 井岡誠司、久保司郎、越智真弓、北条公伸、「熱成層が発生するエルボの内面温度分布変動

- 推定のための平板モデルによる熱伝導逆解析手法の開発」、日本機械学会論文集、80・818 (2014)、pp.1-14.
- (28) Ioka, S., Kubo, S., Ochi, M., and Hojo, K., “Development of Inverse Analysis of Heat Conduction and Thermal Stress for Elbow (Part I)”, *J. Pressure Vessel Technol.*, ASME, 138-5 (2016), pp.1-9.
- (29) 久保司郎、辻 昌宏、大路清嗣、「疲労き裂伝ぱ寿命推定のための初期残留応力分布同定に対する逆問題的取扱い」、日本機械学会論文集 (A編)、54・501 (1988)、pp.892-899.
- (30) 久保司郎、大中幸三郎、大路清嗣、「境界積分に基づく物体内の発熱源および荷重の同定」、日本機械学会論文集 (A編)、54・503 (1988)、 pp.1329-1334.
- (31) 久保司郎、大路清嗣、「離散系の材料特性値逆問題に対する解析手法」、日本機械学会論文集 (A編)、57・541 (1991)、 pp.2257-2263.