

# 弾塑性破壊力学の基礎と拡張<sup>1</sup>

## Fundamentals of Elastic-Plastic Fracture Mechanics and Its Extension

久保司郎<sup>2</sup> 摂南大学理工学部 機械工学科  
KUBO, Shiro, Department of Mechanical Engineering,  
Faculty of Science and Engineering, Setsunan University

### Abstract

This paper describes the fundamentals of the elastic-plastic fracture mechanics. The HRR (Hutchinson-Rice-Rosengren) stress and strain singularity appearing near the crack tip, the J-integral as a measure of energy release rate, the path-independence of the J-integral are presented. Path-independent integrals are demonstrated as an extension of the J-integral. Several methods for evaluating the J integral are shown. Applicability and limitations of J-integral to crack initiation, stable crack growth and fatigue crack growth are discussed.

キーワード: き裂, 弾塑性破壊力学, J積分, 経路独立積分

**Keywords :** crack, elastic-plastic fracture mechanics, stress and strain singularity, energy release rate, kJ-integral, path-independent integral

### 1. はじめに

線形弾性破壊力学は, 応力とひずみの間に比例関係があるものとして構築された. 線形弾性破壊力学の主要な概念は, き裂先端近傍の弾性特異応力場の強さを表す応力拡大係数  $K$  と, き裂の成長に伴うエネルギーの解放量を表すエネルギー解放率  $G$  である. き裂先端近傍の塑性域が小さく, いわゆる小規模降伏条件が満たされている場合には, 応力拡大係数  $K$  とエネルギー解放率  $G$  が適用可能である.

き裂先端近傍の塑性域が発達して, その大きさが構造部材やき裂の寸法と同じオーダーになると, 大規模降伏条件や全面降伏条件下では, もはや  $K$  を用いたき裂先端近傍の力学的状況の表示やき裂の挙動の評価をおこなうことはできない. このような状況下でき裂先端近

<sup>1</sup>【原稿受付】2017年8月5日, 【掲載決定】2017年9月15日

<sup>2</sup>【主著者連絡先】久保司郎 摂南大学, 教授 e-mail: shi-kubo@mec.setsunan.ac.jp  
〒572-8508 大阪府寝屋川市池田中町17-8, 摂南大学理工学部 機械工学科

傍の力学場を表現し、き裂の挙動を評価するものが弾塑性破壊力学である。

弾塑性破壊力学の構築では、線形弾性破壊力学の拡張が試みられた。すなわち、き裂先端特異応力場とエネルギー解放率の弾塑性き裂問題への拡張である。この過程において多くの研究がなされたが、不適切と思われる結果も散見される。何が弾塑性破壊力学の根幹をなし、どこまでの展開が可能だったかを記述しておくことは、後々のために重要であり、またそれをなすには今しかないと考える。そこで本稿では、弾塑性破壊力学の発展期に身を置いたものの一人として、その基礎理論と適用における留意点にふれながら、弾塑性破壊力学の基礎概念について概説することとする。

## 2. 弾塑性特異応力場

線形弾性の範囲を超えた弾塑性条件下では、応力 - ひずみ関係の非線形性が顕著となる。このため、非線形性を考慮に入れながら、き裂先端近傍の応力ひずみ場が求められた。議論の簡単のため、応力 - ひずみ関係として、次式のべき乗則が用いられた。

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (1)$$

ここに、 $\varepsilon_0$  および  $\sigma_0$  は材料定数、 $n$  は硬化指数である。べき乗硬化則のもとにおけるき裂先端近傍の応力  $\sigma_{ij}$ 、およびひずみ  $\varepsilon_{ij}$  には次のような HRR (Hutchinson-Rice-Rosengren) 特異性が生じることが示された<sup>(1)(2)</sup>。

$$\sigma_{ij} = K_\sigma r^{-1/(n+1)} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n) \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = K_\varepsilon r^{-n/(n+1)} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n) \quad (3)$$

ここに、 $(r, \theta)$  は図 1 のようにき裂先端に極をおく極座標、 $K_\sigma$  および  $K_\varepsilon$  はそれぞれ、塑性応力拡大係数および塑性ひずみ拡大係数であり、また  $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n)$  および  $\tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n)$  は、き裂先端近傍の  $\sigma_{ij}$  および  $\varepsilon_{ij}$  の  $\theta$  方向分布を表す分布関数である。これらの式より、応力は  $r^{-1/(n+1)}$  の特異性を、ひずみは  $r^{-n/(n+1)}$  の特異性を有していることがわかる。この特異性を Hutchinson は数値的に示し、また Rice-Rosengren はモード III (面外せん断) に対する特殊な解析解<sup>(3)</sup>を参照しつつ、後述の J 積分の経路独立性をもとに理論的に示した。線形弾性、すなわち  $n=1$  の場合には、応力とひずみの特異性は  $r^{-1/2}$  であるので、これらのべき乗硬化則のもとにおける式(2)および(3)の特異性は、線形弾性の特異性を拡張したものになっていることがわかる。式(1)に式(2)を適用してひずみを応力により記述し式(3)と比較すると、 $K_\varepsilon$  は  $K_\sigma$  を用いて次のように表される。

$$K_\varepsilon = \varepsilon_0 (K_\sigma / \sigma_0)^n \quad (4)$$

変位  $u_i$  を微分することにより式(3)のひずみ  $\varepsilon_{ij}$  が得られるので、変位  $u_i$  は次のように表される。

$$u_i = K_\varepsilon r^{1/(n+1)} \tilde{u}_i(\theta, n) \quad (5)$$

ここに  $\tilde{u}_i(\theta, n)$  は、き裂先端近傍の  $u_i$  の  $\theta$  方向分布を表す分布関数である。式(5)より変位が  $r^{1/(n+1)}$  に比例することがわかる。

弾塑性破壊力学展開の初期段階においては、応力拡大係数  $K$  を拡張した塑性応力拡大係数  $K_\sigma$  および塑性ひずみ拡大係数  $K_\varepsilon$  が使われた。しかし、式(2) および(3)に次元解析を適用するとわかるように、 $K_\sigma$  の次元は応力に長さの  $1/(n+1)$  乗をかけたもの、 $K_\varepsilon$  の次元は長さの  $n/(n+1)$  乗となり、応力場およびひずみ場の強さの次元が材料定数に依存するという不都合が生じる。また、 $K_\sigma$  および  $K_\varepsilon$  を数値計算するときには、非線形性を考慮に入れた特異場解析が必要である。これらのため、応力拡大係数  $K$  を直接拡張した  $K_\sigma$  および  $K_\varepsilon$  はあまり使われず、かわって次元に材料定数が入ることがなく、実験的評価も可能であるという利点をもつ、次章の J 積分が使われるようになった。

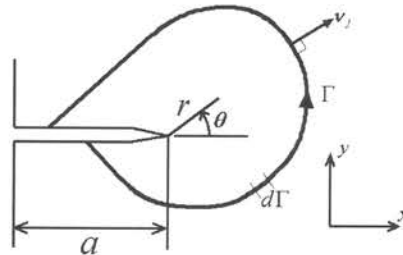


図1 き裂先端に極をもつ座標  $(r, \theta)$  と積分経路  $\Gamma$

### 3. J 積分

$K_\sigma$  および  $K_\varepsilon$  が応力拡大係数  $K$  を拡張したものであるのに対し、エネルギー解放率を非線形体に拡張したものが J 積分<sup>(4)</sup>である。したがって J 積分を式に書くと、ポテンシャルエネルギーを  $\Pi_p$ 、き裂の面積を  $A$  として、

$$J = -\frac{d\Pi_p}{dA} \quad (6)$$

となる。J と線形弾性の場合のエネルギー解放率  $G$  とには、形式上の定義の違いはない。き裂の単位面積の成長に伴い解放されるエネルギーは、き裂前方で作用している応力およびき裂の進展により生じるき裂の開口量により評価できる。したがって、 $G$  の計算の場合と同じく J は、 $I_n$  を  $n$  により定まる定数とし式(4)を用いて、



$$J = I_n K_\sigma K_\varepsilon = I_n \varepsilon_0 \left( \frac{K_\sigma}{\sigma_0} \right)^n K_\sigma = I_n \sigma_0 \left( \frac{K_\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{1/n} K_\varepsilon \quad (7)$$

となる。この式は、 $K_\sigma$  および  $K_\varepsilon$  が  $J$  により記述できることを表している。式(2)、(3) および(5)の  $K_\sigma$  および  $K_\varepsilon$  を  $J$  に置き換えると、

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left( \frac{J}{I_n \sigma_0 \varepsilon_0 r} \right)^{1/(n+1)} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n) \quad (8)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \left( \frac{J}{I_n \sigma_0 \varepsilon_0 r} \right)^{n/(n+1)} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n) \quad (9)$$

$$u_i = \varepsilon_0 \left( \frac{J}{I_n \sigma_0 \varepsilon_0} \right)^{n/(n+1)} r^{1/(n+1)} \tilde{u}_i(\theta, n) \quad (10)$$

となる。したがって、式(1)のべき乗型硬化則のもとでは、き裂先端近傍の応力、ひずみおよび変位は、 $J$  積分が与えられると完全に定まる、いわゆる  $J$  積分による単一パラメータ表示ができる。

図1に示すような2次元き裂に対し、座標  $xy(=x_1x_2)$  をとる。き裂面は、 $x(=x_1)$  軸に平行であるものとする。また、次式のひずみエネルギー密度  $W$  が、存在するものとする。

$$W = \int_{\varepsilon} \sum_{i,j} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (11)$$

$J$  積分は、図1のようにき裂先端を囲む経路  $\Gamma$  に対する経路積分として、次式のように定義された。

$$J = \int_{\Gamma} \left[ W v_1 - \sum_i T_i (\partial u_i / \partial x_1) \right] d\Gamma \quad (12)$$

ここに、 $v_i$  は外向き単位法線ベクトルの成分である。 $T_i$  は経路上で作用する表面力であり、 $v_i$  を用いて次式により与えられる。

$$T_i = \sum_j \sigma_{ij} v_j \quad (13)$$

$J$  積分は、Eshelby のエネルギーモーメントテンソル<sup>(5)</sup>を非線形問題に拡張したものとみることができる。

### 3-1 $J$ 積分の経路独立性

$J$  積分は、積分経路  $\Gamma$  に依存しないという、経路独立性を有している。この経路独立性を直接導いてみる。図2のようにき裂先端を囲みき裂下面上の1点から上面上の1点に至る二つの経路  $\Gamma_1$  および  $\Gamma_2$  をとり、これらに対する  $J$  積分値をそれぞれ  $J_1$

および  $J_2$  で表す.  $J_2$  と  $J_1$  の差は,

$$J_2 - J_1 = \int_{\Gamma_2} \left[ W v_1 - \sum_i T_i (\partial u_i / \partial x_1) \right] d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \left[ W v_1 - \sum_i T_i (\partial u_i / \partial x_1) \right] d\Gamma \quad (14)$$

となる. 経路  $\Gamma_1$  の向きを反対にしたものを  $-\Gamma_1$  と表すと,  $-\Gamma_1$  では  $v_1$  の符号が反転するので,

$$J_2 - J_1 = \int_{\Gamma_2 - \Gamma_1} \left[ W v_1 - \sum_i T_i (\partial u_i / \partial x_1) \right] d\Gamma \quad (15)$$

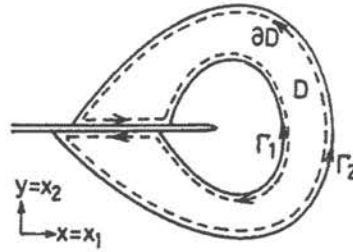


図2 J積分の経路独立性

き裂面上の経路では  $v_1 = 0$  かつ  $T_i = 0$  であるので, き裂面上の経路に対し J 積分の被積分関数は 0 となる. したがって, 右辺は  $\Gamma_2 - \Gamma_1$  にき裂面上の経路を加えてできる閉経路, すなわち図2の領域  $D$  を囲む経路  $\partial D$  に対し J 積分値を評価したものとなる.

$$J_2 - J_1 = \int_{\partial D} \left[ W v_1 - \sum_{i,j} \sigma_{ij} v_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \right] d\Gamma \quad (16)$$

ここで, 境界積分を領域積分に変換する Gauss-Green の定理, すなわち

$$\int_{\partial D} F v_i d\Gamma = \int_D \frac{\partial F}{\partial x_i} dA \quad (17)$$

を適用すると,

$$J_2 - J_1 = \int_{\partial D} \left[ \frac{\partial W}{\partial x_1} - \sum_{i,j} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) - \sum_{i,j} \sigma_{ij} \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial x_j} \right) \right] d\Gamma \quad (18)$$

物体力が作用しないとき, 釣合い式は,

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (19)$$

となる. 式(11)と微小ひずみの定義式, すなわち,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (20)$$

より,

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \sum_{i,j} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} = \sum_{i,j} \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} = \sum_{i,j} \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_1} \right) \quad (21)$$

ここで、応力の対称性

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (22)$$

ならびに、添え字  $i, j$  が総和をとるために使用されるもので、別の記号でもよいことに留意すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x_1} &= \sum_{i,j} \sigma_{ij} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial x_j} + \sum_{i,j} \sigma_{ji} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1 \partial x_i} = \sum_{i,j} \sigma_{ij} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial x_j} + \sum_{j,i} \sigma_{ij} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial x_j} \\ &= \sum_{i,j} \sigma_{ij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial x_j} \end{aligned}$$

この式と式(19)を式(18)に代入すると、

$$J_2 - J_1 = 0$$

となる。よって、 $J$  積分は積分経路  $\Gamma$  に依存しない。

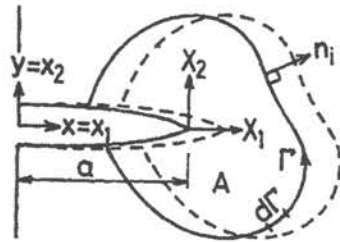


図3 移動座標系と積分経路  $\Gamma$

### 3-2 $J$ 積分の経路積分表示の導出

$J$  積分は、式(6)のように、き裂が単位面積だけ成長するときのエネルギーの解放量を表している。以下では、式(6)より式(12)の経路積分表示が導かれることを示す。

き裂面と  $x(x_1)$  軸が平行となるように、座標系  $xy(=x_1x_2)$  をとる。また、き裂先端に原点をとり、き裂成長とともに移動する移動座標系  $XY(=X_1X_2)$  をとる。

経路  $\Gamma$  で囲まれる板厚  $B$  の領域  $A$  のポテンシャルエネルギー  $\Pi_p$  の変化を考え

る。  $\Pi_p$  は次式のように、ひずみエネルギーと外力のポテンシャルとの和で与えられる。

$$\Pi_p = B \iint_A W dX_1 dX_2 - B \int_{\Gamma} \sum_i T_i u_i d\Gamma$$

したがって、  $\Pi_p$  のき裂成長に伴う変化率として与えられる J 積分は、

$$J = -\frac{d\Pi_p}{da} = -\frac{1}{B} \frac{d\Pi_p}{da} = -\frac{d}{da} \iint_A W dX_1 dX_2 + \int_{\Gamma} \sum_i T_i \frac{du_i}{da} d\Gamma \quad (23)$$

で表される。移動座標系を用いた場合、すべての変数は  $X_1$ 、 $X_2$  と  $a$  により表現できる。移動座標系と静止座標系の間には、

$$X_1 = x_1 - a, \quad X_2 = x_2 \quad (24)$$

の関係があるので、

$$\frac{\partial X_1}{\partial a} = -1, \quad \frac{\partial X_2}{\partial a} = 0 \quad (25)$$

したがって、  $a$  に関する全微分は、

$$\frac{d}{da} = \frac{\partial}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial a} = -\frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial a} \quad (26)$$

となる。これを式(23)に適用すると、

$$J = \iint_A \frac{\partial W}{\partial X_1} dX_1 dX_2 - \iint_A \frac{\partial W}{\partial a} dX_1 dX_2 - \int_{\Gamma} \sum_i T_i \frac{\partial u_i}{\partial X_1} d\Gamma + \int_{\Gamma} \sum_i T_i \frac{\partial u_i}{\partial a} d\Gamma \quad (27)$$

式(27)右辺の第 2 項と第 4 項は、仮想仕事の原理より相殺される。このことは経路独立積分の証明における  $x_1$  に関する微分を、  $a$  に関する微分に置き換えることにより、直接的に示すことができる。よって、

$$J = \int_{\Gamma} W dX_2 - \int_{\Gamma} \sum_i T_i \frac{\partial u_i}{\partial X_1} d\Gamma \quad (28)$$

ここで、

$$dX_2 = v_1 d\Gamma \quad (29)$$

となり、また  $a$  が固定されれば、  $X_1$  に関する微分が、  $x_1$  に関する微分に置き換えられることより、式(12)が導かれる。

以上のように移動座標系を用いると J 積分の経路積分表示が得られる。もし、静止座標系を用いてき裂先端を移動させると、  $r^{-1}$  の特異性をもつひずみエネルギー密度を座標について微分することになり、  $r^{-2}$  の特異性が生じる。  $r^{-2}$  の特異性を有するものを領域積分すると、その値は不定となる。このため、式の変形上は問題が生じなくても、得られた結果が正しいものになっている保証はない。

き裂の成長の代わりに、有限寸法を有する切欠きが成長するものとしてエネルギーの解放量を計算すると、特異性が生じないので議論は簡単になる。このとき解放されるエネルギーは、切欠きの成長により切欠き部の材料がなくなることによるエ

エネルギーの減少によるものであり、切欠き底に沿う経路を $\Gamma_n$ として、

$$J = \int_{\Gamma_n} W dx_2 \quad (30)$$

となる。切欠き底 $\Gamma_n$ では表面力 $T_i$ は作用しないため $T_i$ を含む項を付加しても値が変わらないことと、J積分の経路独立性を用いると、 $J$ は切欠きを囲む経路 $\Gamma$ に対して、

$$J = \int_{\Gamma_n} \left[ W v_1 - \sum_i T_i (\partial u_i / \partial x_1) \right] d\Gamma = \int_{\Gamma} \left[ W v_1 - \sum_i T_i (\partial u_i / \partial x_1) \right] d\Gamma \quad (31)$$

となり、式(12)が導出できる。この導出は簡単ではあるが、切欠きが成長し材料が消失するという、現実離れした仮定を用いているところに難点がある。

### 3-3 経路独立積分としてのJ積分の拡張

J積分の積分経路独立性は、き裂先端の代表量が、遠方の経路上の評価値から得られるという意味で、非常に魅力的である。このため、種々の経路独立積分が提案されてきた。たとえば、コンプリメンタリひずみエネルギー密度 $W_c$ 、すなわち、

$$W_c = \int_{\sigma} \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \quad (32)$$

を用いて、J積分と相補な関係にある次式のコンプリメンタリJ積分が提案されている<sup>(6)(7)</sup>。

$$J_c = \int_{\Gamma} \left[ -W_c v_1 + \sum_{i,j} u_i (\partial \sigma_{ij} / \partial x_1) v_j \right] d\Gamma \quad (33)$$

以上ではき裂の成長方向は $x_1$ 方向としたが、J積分が $x_k$ 方向に平行移動するときエネルギー変化率は、

$$J_k = \int_{\Gamma} \left[ W v_k - \sum_i T_i (\partial u_i / \partial x_k) \right] d\Gamma \quad (34)$$

と与えられ、ベクトルになっている。き裂の回転およびき裂の拡大に伴うエネルギー変化率を表すものとして、次のL積分とM積分が提案されている<sup>(8)(9)</sup>。

$$L_3 = \int_{\Gamma} \sum_{i,j,k} e_{3ij} [W x_j v_i + T_i u_j - T_k (\partial u_k / \partial x_i) x_j] d\Gamma \quad (35)$$

$$M = \int_{\Gamma} \left[ \sum_i W x_i v_i - \sum_{i,j} T_i (\partial u_j / \partial x_i) x_i \right] d\Gamma \quad (36)$$

ここに、 $e_{kij}$ は交替テンソルであり、

$$e_{312} = 1, \quad e_{321} = -1, \quad \text{これらの場合以外} \quad e_{3ij} = 0$$



となる。

クリープ条件下では、ひずみ速度が応力の関数として表される。クリープポテンシャル  $W^*$  を、

$$W^* = \int_{\dot{\varepsilon}} \sum_{i,j} \sigma_{ij} d\dot{\varepsilon}_{ij} \quad (37)$$

で定義したとき、クリープ J 積分（修正 J 積分）、 $J^*$  は、次式で与えられる<sup>(10)(11)</sup>。

$$J^* = \int_{\Gamma} \left[ W^* \nu_1 - \sum_i T_i (\partial \dot{u}_i / \partial x_1) \right] d\Gamma \quad (38)$$

$J^*$  と本質的に同じものは、 $C^*$  積分とも呼ばれている<sup>(12)</sup>。

ひずみエネルギー密度  $W$  が定義できる偶応力を考慮したマイクロポーラ理論に対しても、経路独立積分が定義できる<sup>(7)</sup>。

線形弾性のもとにおけるエネルギー解放率  $G$  がモード I（開口型）、モード II（面内せん断）およびモード III（面外せん断型）の成分に分離できることはよく知られている。非線形問題の J 積分をモード I（開口型）、モード II（面内せん断）およびモード III（面外せん断型）の成分に分離する試みもある。しかし、J 積分がモード分離できるのは線形弾性の場合に限られることを示すことができる。これは、変形の重ね合わせが成立せず、各モードの応力が変形に相互に影響を及ぼすためである。

慣性力  $\rho \ddot{u}_i$ 、物体力  $F_i$  や固有ひずみ  $\varepsilon_{ij}^*$  がある場合には、釣合い式にこれらの寄与が入るため、き裂先端部の場の強さをもはや経路積分だけで表現することはできない。岸本ら<sup>(13)</sup>は、き裂先端の破壊進行域を囲む経路を  $\Gamma_{end}$  とし、次式の  $\hat{J}$  を提案している。

$$\hat{J} = \int_{\Gamma_{end}} \left[ - \sum_i T_i (\partial u_i / \partial x_1) \right] d\Gamma \quad (39)$$

しかし、 $\hat{J}$  の経路  $\Gamma_{end}$  の取り方により、 $\hat{J}$  の評価値が変わる可能性がある。このため、

$$\hat{J} = \int_{\Gamma_{end}} \left[ W \nu_1 - \sum_i T_i (\partial u_i / \partial x_1) \right] d\Gamma \quad (40)$$

と再定義し、 $\Gamma_{end}$  から離れた経路  $\Gamma$  に対して経路積分を評価すると、 $\Gamma_{end}$  と  $\Gamma$  ととき裂面で囲まれる領域  $A$  に対する面積分を入れて

$$\hat{J} = \int_{\Gamma} \left[ W \nu_1 - \sum_i T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] d\Gamma + \int_A \left[ \sum_{i,j} \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^*}{\partial x_1} - \sum_i (\rho \ddot{u}_i - F_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] dA \quad (41)$$

となる。

このように領域積分をいれることを厭わなければ、経路独立性が確保できることは留意すべきである。

### 3-4 3次元き裂のJ積分

3次元き裂では、厚さ方向、すなわち  $x_3$  方向のエネルギーの移動を考えなければならぬ。また、式(34)のように、J積分は  $x_k$  方向のき裂成長に対するエネルギーの解放量を表すベクトルとしての性格を有する。これらのため、き裂前縁のある点における  $x_k$  方向のき裂成長に対するエネルギーの解放率は、き裂前縁を薄い平板で切断したときのエネルギーの収支から評価することができ、次式のような局所的Jベクトル  $J_k^{local}$  により与えられる<sup>(14)</sup>。

$$J_k^{local} = \int_{\Gamma} \left[ W v_i - \sum_i T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] d\Gamma - \int_A \sum_i \frac{\partial}{\partial x_3} (\sigma_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}) dA \quad (42)$$

この  $J_k^{local}$  は、式(34)の拡張形になっている。また  $J_k^{local}$  は、き裂前縁に垂直であるという性質を有している<sup>(15)</sup>。

き裂前縁の各点で、き裂成長量に対応するベクトル  $m_k$  を考える。このときの解放エネルギーは、き裂前縁全体を包み込む面  $S$ 、き裂面と  $S$  により囲まれる領域  $V$  に対し、次式の全体的Jスカラー  $J^{global}$  として評価できる<sup>(15)</sup>。

$$J^{global} = \int_S \sum_i \left[ W v_i - \sum_j T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] m_i d\Gamma - \int_V \left[ W \sum_i \frac{\partial m_i}{\partial x_i} - \sum_{i,j,k} \sigma_{jk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial m_i}{\partial x_k} \right] dV \quad (43)$$

このとき、全体的Jスカラー  $J^{global}$  は、局所的Jベクトル  $J_k^{local}$  とき裂成長量ベクトル  $m_k$  の積をき裂前縁  $f$  に沿って積分した次式のように与えられる。

$$J^{global} = \int_f \sum_k J_k^{local} m_k df \quad (44)$$

式(44)より、 $m_k$  の関数形が異なっても、き裂前縁に沿う  $m_k$  の値が同じであれば、 $J^{global}$  としては同じ値が得られる。このため、式(43)より  $J^{global}$  の表現に幾通りもの形が存在する。軸対称き裂のJ積分に対して、いくつもの表示式が得られている<sup>(16)</sup>。

き裂成長量に対応するベクトル  $m_k$  が、等方拡大に対応する

$$m_i = x_i \quad (45)$$

のとき、 $J^{global}$  は、M積分に一致する。また、 $m_k$  が、回転に対応する

$$m_i = \sum_k e_{3ik} x_k \quad (46)$$

のとき、 $J^{global}$  は、L積分に一致する。

## 4. J積分の評価

J積分の評価は、非線形性ゆえに容易ではない。ここではJ積分の活用に多大な影

響のあった簡便評価を中心にのべる。

図4のように、遠方の作用応力  $\sigma_\infty$  をうける無限板の中にある長さ  $2a$  の浅いき裂については、応力拡大係数  $K$  は次式により表される。

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a}$$

有限板中のき裂に対しても、き裂長さが板幅の半分程度まではこの式が近似式として有効であることが知られている。

同じ問題に対する  $J$  積分の表示式を考える。  $J$  積分の経路積分表示式(12)より、  $J$  の次元は応力、ひずみ、長さの次元を掛け合わせたものになる。したがって、たとえば  $n$  乗硬化則(1)のもとでは、応力としては遠方の作用応力  $\sigma_\infty$ 、ひずみとしては  $\sigma_\infty$  の作用下のひずみ  $\varepsilon_\infty$ 、長さとしては  $a$  しかないので、  $J$  は

$$J = h_1(n) \sigma_\infty \varepsilon_\infty a \quad (47)$$

の形に表される<sup>(17)(18)</sup>。ここに、  $h_1(n)$  としては、次の関数形が知られている。

$$h_1(n) = 3.85\sqrt{n}(1-1/n) + \pi/n \quad (48)$$

$$h_1(n) = \pi(\pi n/2)^{(n-1)/(2n-1)} \quad (49)$$

半径  $a$  の円盤状のき裂に対しても式(47)が成立し、この問題の  $h_1(n)$  としては、次の関数形が提案されている<sup>(19)</sup>。

$$h_1(n) = \frac{6}{\pi} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{-1/2} \quad (50)$$

$n$  が大きい場合には、き裂が長くなると浅いき裂の近似は成立しなくなる。

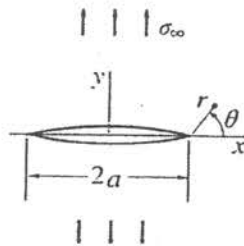


図4 無限板中の長さ  $2a$  のき裂

図5のような、リガメント長さ  $2b$  の深いき裂の  $J$  積分を考える。この問題の応力としては遠方の正味断面応力  $\sigma_{net}$ 、ひずみとしては  $\sigma_{net}$  のもとにおけるひずみ  $\varepsilon_{net}$ 、長さとしては  $b$  しかないので、  $J$  は

$$J = h_2(n) \sigma_{net} \varepsilon_{net} b \quad (51)$$

の形に表される<sup>(18)</sup>.  $h_2(n)$ としては, 次の関数が提案されている.

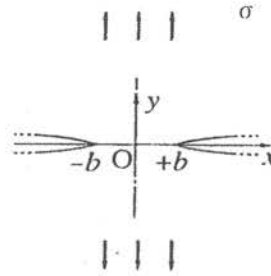


図5 リガメント長さ  $2b$  の深いき裂

$$h_2(n) = \frac{4\pi}{(\pi^2 - 4)\sqrt{n}} \quad (52)$$

以上の  $J$  の表示式は, 特定の応力 - ひずみ条件下の特定のき裂に対するものであり, 適用範囲は限定される.

そこで, いかなる応力 - ひずみ関係に対しても適用できる  $J$  積分の評価が求められた. 変位固定条件では, き裂を有する物体を含む系に蓄えられたエネルギーは, 荷重 - 変位曲線の下面積  $U$  により表される. き裂成長に伴う  $U$  の変化から  $J$  積分が求められる.

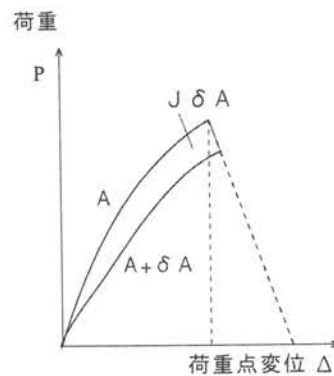


図6 長さの異なるき裂に対する荷重 - 変位曲線と  $J$  積分の関係



図 6 のように、き裂の面積のみが微小量  $\delta A$  だけ大きくなったとき、 $U$  の変化量は、荷重 - 荷重点変位曲線の間の面積により与えられ、これは  $J$  積分の定義より  $J\delta A$  に等しい。き裂長さを  $a$ 、板厚を  $B$  とすると、 $\delta A = B\delta a$  となる。2本の荷重 - 荷重点変位曲線の水平方向のずれは、荷重  $P$  一定下の荷重点変位の変化率  $(\partial\Delta/\partial a)_P$  を用いて  $(\partial\Delta/\partial a)_P\delta a$  により表される。したがって  $J\delta A$  は、 $(\partial\Delta/\partial a)_P\delta a$  を  $P$  について積分した次式により与えられる。

$$J\delta A = JB\delta a = \int_P \left( \frac{\partial\Delta}{\partial a} \right)_P \delta a dP$$

この式より、

$$J = \frac{1}{B} \int_P \left( \frac{\partial\Delta}{\partial a} \right)_P dP \quad (53)$$

が得られる。同様に、2本の荷重 - 荷重点変位曲線の鉛直方向のずれが、 $-(\partial P/\partial a)_\Delta \delta a$  により表されることを用いると、次式が得られる。

$$J = -\frac{1}{B} \int_\Delta \left( \frac{\partial P}{\partial a} \right)_\Delta d\Delta \quad (54)$$

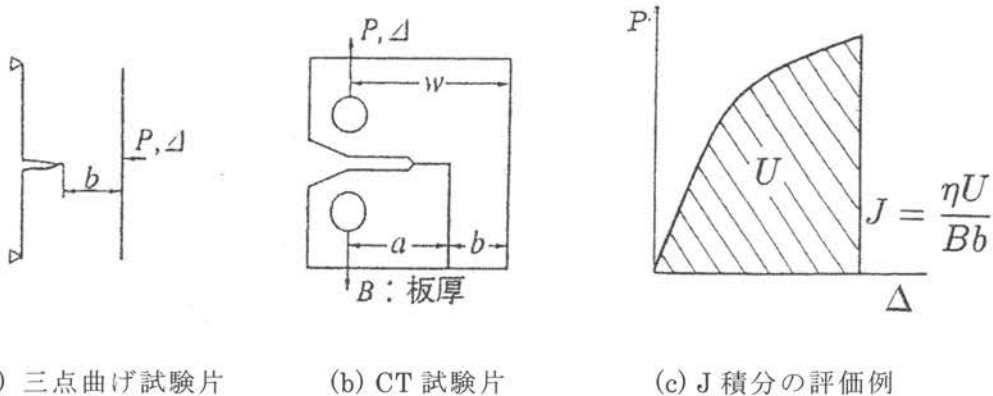


図 7 深いき裂を有する曲げ型試験片および CT(コンパクト・テンション)試験片に対する、 $J$  積分の簡便評価

図 7(a)に示すような、深いき裂を有する曲げ型試験片については、 $J$  積分値が簡便に評価できることが、Rice ら<sup>(20)</sup>により示された。 $J$  積分適用の爆発的拡大の原動力となったこの簡便評価について、以下に解説する。

試験片の端部で曲げモーメント  $M$  が作用しているとき、角変位  $\Theta$  が生じているものとする。このとき  $J$  は、式(53)の変位  $\Delta$  を角変位  $\Theta$  に、荷重  $P$  を曲げモーメント  $M$  におきかえたものとなる。すなわち、

$$J = \frac{1}{B} \int_M \left( \frac{\partial \Theta}{\partial a} \right)_M dM \quad (55)$$

が得られる。深いき裂では変形がリガメント（未破断部）に集中したとき、角変位  $\Theta$  に影響を及ぼす寸法因子はリガメント長さ  $b$  のみとなると考えられる。角変位  $\Theta$  に影響を及ぼす因子は、リガメント長さ  $b$ 、単位厚さあたりの曲げモーメント  $M/B$  と、材料定数である。材料定数には、ヤング率、降伏応力などの応力の次元を有する材料定数が必ず含まれ、応力の次元を持たない材料定数は硬化指数など無次元のものである。応力の次元を有する材料定数と組み合わせて、次元を有しない角変位  $\Theta$  が記述できるためには、 $b$  および  $M/B$  は、応力の次元を有する  $s = M/(Bb^2)$  の組合せとして影響を及ぼしているはずである。したがって、 $\Theta$  は  $s$  の関数として

$$\Theta = g(s), \quad s = \frac{M}{Bb^2} \quad (56)$$

と表される。よって、

$$\left( \frac{\partial s}{\partial b} \right)_M = -\frac{2M}{Bb^3}, \quad \left( \frac{\partial s}{\partial M} \right)_b = \frac{1}{Bb^2}, \quad (57)$$

また、き裂長さ  $a$  が大きくなる分だけリガメント長さ  $b$  は小さくなるので、

$$\frac{db}{da} = -1 \quad (58)$$

となる。このとき式(55)の被積分関数は、

$$\left( \frac{\partial \Theta}{\partial a} \right)_M = g'(s) \left( \frac{\partial s}{\partial b} \right)_M \frac{db}{da} = g'(s) \frac{2M}{Bb^3} \quad (59)$$

となり、同様にして、

$$\left( \frac{\partial \Theta}{\partial M} \right)_b = g'(s) \left( \frac{\partial s}{\partial M} \right)_b = g'(s) \frac{1}{Bb^2} \quad (60)$$

これらの式を式(55)に代入すると、

$$J = \frac{1}{B} \int_M g'(s) \frac{2M}{Bb^3} dM = \frac{1}{B} \int_M \frac{2M}{b} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial M} \right)_b dM = \frac{2}{Bb} \int_{\Theta} M d\Theta \quad (61)$$

外力のなした仕事を  $U$  で表すと、

$$J = \frac{2U}{Bb}, \quad U = \int_{\Theta} M d\Theta \quad (62)$$

このように  $J$  は外力がなした仕事  $U$  (図 7(c)) をリガメントの断面積で除し 2 倍することにより与えられ、 $J$  が非常に簡単に評価できることが明らかとなった。

図 7(b) に示す CT 試験片（コンパクトテンション試験片、小型引張り試験片）では、曲げ以外に引張の影響が入る。式(62)において、係数 2 のかわりに、引張の影響を考慮に入れた  $\eta$  ファクタが用いられている<sup>(21)</sup>。

$$J = \frac{\eta U}{Bb} \quad (63)$$

$\eta$  の値は 2 に近い.

図 8(a)に示すような, 深い両側き裂を有する引張型試験片および深い中央き裂を有する引張型試験片に対しても, J 積分の簡便評価式が Rice ら<sup>(20)</sup>により提案されている. 原論文では説明されていないが, これらの試験片では, き裂が深くなっても線形弾性変形がリガメント部に集中することはなく, 寸法因子としてリガメント長さ  $b$  以外のものが混入する. そこで Rice らは, 荷重点変位を弾性成分  $\Delta_{el}$  と塑性成分  $\Delta_{pl}$  に分解し, 塑性成分  $\Delta_{pl}$  がリガメント部に集中するものとした.  $\Delta_{pl}$  に次元解

析を適用すると,  $\Delta_{pl}/b$  を  $s = P/(Bb)$  の関数として

$$\frac{\Delta_{pl}}{b} = m(s), \quad s = \frac{P}{Bb} \quad (64)$$

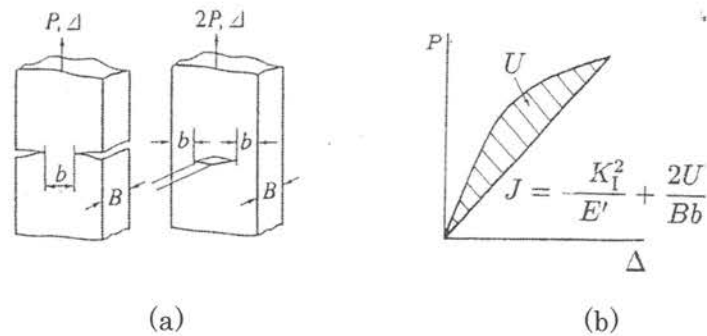


図 8 深い両側き裂を有する引張型試験片および深い中央き裂を有する引張型試験片に対する, J 積分の簡便評価

よって,  $J$  は弾性成分  $J_{el}$  と塑性成分  $J_{pl}$  に分けられ, 前者は線形弾性のエネルギー解放率  $G$  によって与えられ, 後者は

$$J_{pl} = \frac{1}{B} \int_P \left( \frac{\partial \Delta_{pl}}{\partial a} \right)_P dP \quad (65)$$

によって求められる. 次元解析を行うと,

$$\frac{\Delta_{pl}}{b} = m(s), \quad s = \frac{P}{Bb}$$

このとき, 式(64)の次元解析より,

$$\left(\frac{\partial\Delta_{pl}}{\partial a}\right)_p = -\left(\frac{\partial(bm(s))}{\partial b}\right)_p = -m(s) - bm'(s)\frac{\partial s}{\partial b} = -m(s) + m'(s)\frac{P}{Bb}$$

$$\left(\frac{\partial\Delta_{pl}}{\partial P}\right)_a = \left(\frac{\partial(bm(s))}{\partial P}\right)_a = bm'(s)\frac{\partial s}{\partial P} = m'(s)\frac{1}{B}$$

であるので、

$$\left(\frac{\partial\Delta_{pl}}{\partial a}\right)_p = \frac{P}{b}\left(\frac{\partial\Delta_{pl}}{\partial P}\right)_b - \frac{\Delta_{pl}}{b}$$

となる。よって、

$$J_{pl} = \frac{1}{B}\int_p\left(\frac{P}{b}\left(\frac{\partial\Delta_{pl}}{\partial P}\right)_b - \frac{\Delta_{pl}}{b}\right)dP$$

部分積分を適用すると、

$$J = J_{el} + J_{pl} = J_{el} + \frac{1}{Bb}\left[2\int_{\Delta_{pl}}Pd\Delta_{pl} - P\Delta_{pl}\right] = J_{el} + \frac{2}{Bb}\left[\int_{\Delta}Pd\Delta - \frac{P\Delta}{2}\right] \quad (66)$$

したがって、J積分は、図 8(b)のハッチング部の面積  $U$  をリガメント断面積  $Bb$  で除し 2 倍したものに、 $J_{el}$ 、すなわち次式のエネルギー解放率  $G$  を加えたものになる。

$$J_{el} = G = \frac{K^3}{E}$$

ここに、 $E'$  は平面応力の場合はヤング率  $E$  に等しく、平面ひずみの場合は  $\nu$  をポアソン比として  $E/(1-\nu^2)$  で与えられる。

このように、Rice の簡便式を用いれば、材料の応力 - ひずみ関係が未知であっても、特定のき裂試験片の荷重 - 荷重点変位を用いて J 積分を評価することができる。このことより、J 積分の適用が飛躍的に進んだ。

クリープ J 積分、 $J^*$  については、深い曲げき裂試験片に対し

$$J^* = \frac{2n}{n+1}\frac{P}{Bb}\dot{\Delta} \quad (67)$$

が提案されている<sup>(22)</sup>。ここに  $\dot{\Delta}$  は荷重点変位速度、 $n$  はクリープひずみの応力依存性を表すクリープ指数である。深い両側き裂を有する引張型試験片および深い中央き裂を有する引張型試験片に対する  $J^*$  は、

$$J^* = \frac{n-1}{n+1}\frac{P}{Bb}\dot{\Delta} \quad (68)$$

により得られる。これらの簡便式の有効性は広く、クリープき裂成長試験結果の整理に大いに利用された。これは、一般にクリープ指数  $n$  が大きいため、簡便式の基礎になっている深いき裂の近似が広範囲に成立するためである。



深いき裂に対する J 積分の簡便評価の成功の後、種々のき裂に対する簡便式が提案された。しかし、深いき裂の条件に対応するような、影響因子を限定する条件が成立するのは稀である。簡便評価式の正当性は、仮定の妥当性より見直す必要がある。

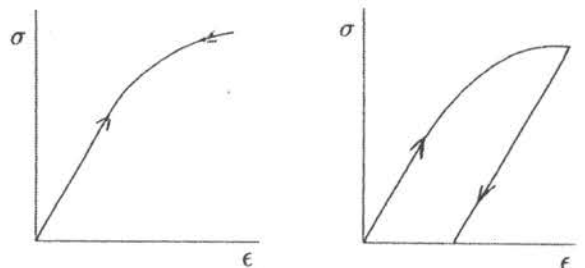
J 積分評価に関する他の方法については、別報<sup>(23)</sup>を参照されたい。

## 5. J 積分の適用限界

J 積分が適用できるためには、まず弾塑性特異場、すなわち HRR 特異場が存在している必要がある。線形弾性特異場の代表値である応力拡大係数  $K$  の適用限界の議論と同様に適用限界を議論する。弾性特異場を内側から消失させる塑性域の大きさが弾性特異場の支配域の大きさよりも小さいという条件が用いられた。弾塑性特異場の支配域の大きさは、き裂長さ  $a$  やリガメント寸法  $b$  の 1/10 倍程度であると見積もられている。この弾塑性特異場を内側から消失させるものは、き裂先端近傍に生じる破壊進行域である。破壊進行域の大きさはき裂先端開口変位の数倍と見積もられ、き裂先端開口変位は  $J/\sigma_f$  程度である。ここに  $\sigma_f$  は流動応力であり、降伏応力と引張強さの平均値がよく用いられる。これらのことと対応して、弾塑性平面ひずみ破壊じん性  $J_{Ic}$  試験では、適用条件として、

$$b \geq 25 \frac{J_{Ic}}{\sigma_f}$$

が採用されている。



(a) 非線形弾性体  
(全ひずみ塑性体)                      (b) 増分塑性体

図 9 非線形弾性体 (全ひずみ塑性体) と増分塑性体

J 積分の適用限界を与える次の条件は、J 積分の定義にかかわるものである。J 積分の理論構築では、図 9(a)のような非線形弾性体 (全ひずみ塑性体) を仮定している。すなわち、応力 - ひずみ関係に非線形性が入っても負荷時と除荷時の経路が同じで、J 積分の定義に必要なひずみエネルギー密度  $W$  が存在する。実際の材料の塑

性挙動をよりよく表現している図 9(b)のような増分塑性体に対しては、一般に  $W$  が定義できない。J 積分の適用には根拠が必要である。

まず、き裂発生までの一方向負荷のもとでは、非線形弾性体（全ひずみ塑性体）増分塑性体の挙動の差は小さい。これが、き裂発生に対して J 積分が適用できる根拠となっており、J 積分は弾塑性平面ひずみ破壊じん性  $J_{Ic}$  試験などのき裂発生試験で大きな成功をおさめた。

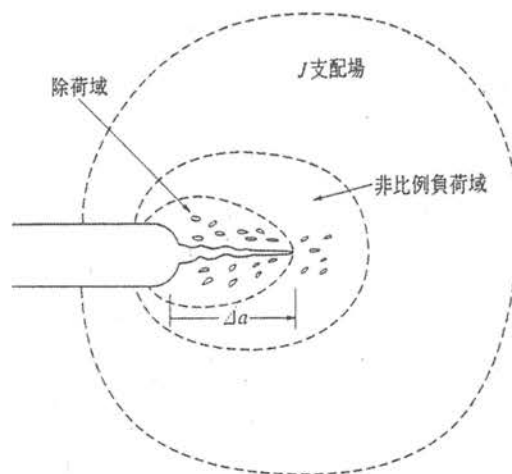


図 10 J 支配き裂成長

き裂が成長すると、成長したき裂の後方では除荷が生じ、J 積分はもはや適用できないことになる。しかし、き裂発生に対する J 積分の成功を背景に、き裂成長に対しても拡張適用する試みがなされた<sup>(24)</sup>。すなわち、き裂成長とともにき裂進展抵抗が急激に増大する場合には除荷域の影響は小さいとする、J 支配き裂成長の考え方である。

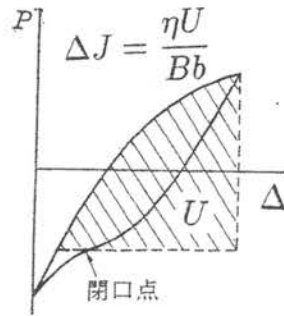
疲労き裂進展では、荷重の繰返しによる除荷とき裂成長による除荷があるため、J 積分の適用は難しいと考えられていた。これに対し、Dowling ら<sup>(25)</sup>はき裂発生に対して用いられた J 積分の簡便評価を参照して図 11 のように J 積分範囲、 $\Delta J$  を評価した。すなわち、曲げ試験片、CT 試験片では、式 (63) に対応させて次式を用いる。

$$\Delta J = \frac{\eta U}{Bb} \quad (69)$$

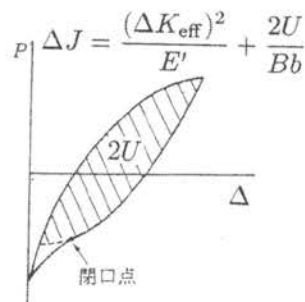
ただし、 $U$  は疲労き裂が開口している点より上で評価した荷重 - 変位曲線の面積である。引張型の深い両側をもつき裂試験片や深い中央をもつき裂をもつ試験片では、

$$\Delta J = \Delta J_{el,eff} + \frac{2U}{Bb} \quad (70)$$

とした。ただし  $\Delta J_{el,eff}$  はき裂が開口している間の有効応力拡大係数の範囲を用いて評価した弾性の J 積分範囲であり、 $U$  はき裂開口に対応させてヒステリシスループの面積の半分としている。



(a) 曲げ型試験片，CT 試験片



(a) 引張型試験片

図 11 疲労き裂に対する  $\Delta J$  評価

このように評価した  $\Delta J$  を用いて、弾塑性条件下の疲労き裂成長速度を整理したところ良好な結果が得られた。このため、多くの研究者が追随する研究を行った。並行して理論的および数値的検討が行われた。その結果、疲労条件下では繰り返し応力 - ひずみ関係に基づき、最小応力を原点とするひずみエネルギー密度を

$$\Delta W = \int_{\Delta \epsilon} \sum_{i,j} \Delta \sigma_{ij} d\Delta \epsilon_{ij} \quad (71)$$

として、 $\Delta J$  を次式のように評価すると、 $\Delta J$  は疲労き裂先端近傍の応力とひずみの変化幅の代表値になっていることが示されている<sup>(26) (27)</sup>。

$$\Delta J = \int_{\Gamma} \left[ \Delta W \nu_1 - \sum_i \Delta T_i (\partial \Delta u_i / \partial x_1) \right] d\Gamma \quad (72)$$

## 6. おわりに

弾塑性破壊力学は、線形弾性破壊力学を参照・拡張する形で展開されたが、その主役たる J 積分の性格をどのように活用し、適用するかにより、予想外の成功や原理を逸脱することによる誤謬があったとみることもできる。本稿が、弾塑性破壊力学を理解する上で参考となれば幸いである。

また、破壊力学に限らず、特異性、すなわち無限大が表れる現象は、多分野でも存在する。破壊力学が、その特性を積極的に活用している点、ならびに特異性を扱うときの注意点が参考となればありがたい。

## 参考文献

- (1) Rice, J.R. and Rosengren, G.F., "Plane Strain Deformation Near a Crack Tip in a Power-Law Hardening Material", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 16-1(1968), pp. 1-12.
- (2) Hutchinson, J.W., "Singular Behaviour at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 16-1(1968), pp. 13-31.
- (3) Rice, J.R., "Stresses Due to a Sharp Notch in a Work-Hardening Elastic-Plastic Material Loaded by Longitudinal Shear", *Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME*, 34(1967), pp. 287-298.
- (4) Rice, J.R., "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks", *Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME*, 35(1968), pp. 370-386.
- (5) Eshelby, J.D., "The Force on an Elastic Singularity", *Philosophical Transactions of Royal Society*, 244(1951), pp. 87-112.
- (6) Bui, H.D., "Dual Path Independent Integrals in the Boundary-Value Problems of Cracks", *Engineering Fracture Mechanics*, 6(1974), pp. 287-296.
- (7) 大路清嗣, 久保司郎, 「J 積分の拡張に関する一考察」, 日本機械学会論文集, 44(1978), pp. 2929-2935.
- (8) Knowles, J.K. and Sternberg, E., "On the Class of Conservation Laws in Linearized and Finite Elastostatics", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 44(1972), pp. 187-211.
- (9) Budianski, B. and Rice, J.R., "Conservation Laws and Energy Release Rates", *Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME*, 40(1973), pp. 201-203.
- (10) 大路清嗣, 小倉敬二, 久保司郎, 「クリープき裂問題に対する J 積分の適用」, 日本機械学会講演論文集, No. 740-11(1974), pp. 207-210.
- (11) 大路清嗣, 小倉敬二, 久保司郎, 「主としてモードⅢ形クリープき裂成長に関する力学的検討」, 日本機械学会論文集, 42(1976), pp. 350-357.



- (12) Landes, J.D. and Begley, J.A., "A Fracture Mechanics Approach to Creep Crack Growth", *ASTM Special Technical Publications*, 590(1976), pp. 128-148.
- (13) 岸本喜久雄, 青木 繁, 坂田 勝, 「き裂の進展挙動を記述するための破壊力学パラメータについて」, 日本機械学会論文集, 46(1980), pp. 1049-1061.
- (14) 宮本博, 菊池正紀, 石田克己, 「三次元の J 積分に関する研究 (第 1 報, 弾性体中の貫通き裂, 表面き裂の J 積分)」, 日本機械学会論文集 (A 編), 49(1983), pp. 314-321.
- (15) 久保司郎, 大路清嗣, 「3 次元き裂の J 積分に関する理論的考察」, 材料, 30(1981), pp. 796-802.
- (16) 久保司郎, 大路清嗣, 「3 次元き裂に対する全体的 J スカラーの二, 三の適用」, 材料, 31 巻(1982), pp. 32-38.
- (17) Shih, C.F. and Hutchinson. J.W., "Fully Plastic Solutions and Large Scale Yielding Estimates for Plane Stress Crack Problems", *Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of ASME*, 98(1976), pp. 289-295.
- (18) 大路清嗣, 小倉敬二, 久保司郎, 「J 積分および修正 J 積分の簡便計算式に関する検討」, 日本機械学会論文集 (A 編), 47(1981), pp. 400-405.
- (19) He, M.Y. and Hutchinson. J.W., "The Penny-Shaped Crack and the Plane Strain Crack in an Infinite Body of Power-Law Material", *Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME*, 48(1981), pp. 830-840.
- (20) Rice, J.R., Paris, P.C. and Merkle, J.G., "Some Further Results of J-Integral Analysis and Estimates", *ASTM Special Technical Publications*, 536(1973), pp. 231-245.
- (21) Merkle, J.G. and Corten, H.T., "A J Integral Analysis for the Compact Specimen, Considering Axial force as Well as Bending Effects", *Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of ASME*, 96(1974), pp. 286-292.
- (22) 大路清嗣, 小倉敬二, 久保司郎, 「全断面塑性における J 積分の簡便式とそれのクリーブき裂問題への応用」, 日本機械学会論文集, 44(1978), pp. 1831-1837.
- (23) 久保司郎, 「J 積分および修正 J 積分の評価とその方法」, 材料, 34(1985), pp. 359-369.
- (24) Paris, P.C., Tada, H., Zahoor, A. and Ernst, H., "The Theory of Instability of the Tearing Mode of Elastic-Plastic Crack Growth", *ASTM Special Technical Publications*, 668(1979), pp. 5-36.
- (25) Dowling, N.E. and Begley, J.A., "Fatigue Crack Growth during Gross Plasticity and the J Integral", *ASTM Special Technical Publications*, 590(1976), pp. 82-103.
- (26) 久保司郎, 屋富祖建樹, 野原政俊, 石丸俊也, 大路清嗣, 「疲労き裂伝ばの

数値シミュレーションによる J 積分範囲  $\Delta J$  の経路積分表示とその意味に関する検討」, 日本機械学会論文集 (A 編), 54(1988), pp. 318-325.

- (27) 久保司郎, 屋富祖建樹, 野原政俊, 大路清嗣, 「疲労き裂伝ばの数値シミュレーションによる J 積分範囲  $\Delta J$  の簡便評価に関する検討」, 日本機械学会論文集 (A 編), 55(1989), pp. 134-141.