

## 回転運動する4円柱まわりの極低レイノルズ数流れ<sup>1</sup>

### Low-Reynolds-Number Flow around Four Rotating Circular Cylinders

植田芳昭<sup>2</sup> 摂南大学理工学部機械工学科

UEDA, Yoshiaki Department of Mechanical Engineering,  
Faculty of Science and Engineering, Setsunan University

#### Abstract

The Stokes solution of the steady flow about two circular cylinders in a side-by-side arrangement, which undergoes step change in its equal but opposite rotating velocity to the parallel axis, produces a uniform stream in a far-field. This is called *Jeffery's paradox*. Against the previous numerical study on Jeffery's Stokes flow, this study aims to compute the long-time viscous flow about rotating four-cylinder cluster using an adaptive numerical scheme based on the vortex particle method. Results for the streamlines and the velocity distributions with respect to the gap spacing between the cylinders and the Reynolds number based on the angular velocity of the cylinder are given.

キーワード: Jefferyのパラドックス, 低レイノルズ数, 円柱, 渦粒子法

**Keywords:** Jeffery's paradox, low-Reynolds number, circular cylinder, vortex particle method

#### 1. はじめに

密度  $\rho$ , 動粘性係数  $\nu$  の粘性流体中で, 同じ半径  $a_n = a$  をもつ2つの円柱  $\mathcal{C}_n$  ( $n = 1, 2$ ) が静止した状態から互いに反対方向に同じ大きさの角速度 ( $\Omega_2 = -\Omega_1$ ) で回転運動する問題について考える (図1参照). この2円柱間の距離は  $|\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2| = L_1 + L_2$  ( $L_1 = L_2$ ) とする. この問題に対する定常解は Jeffery<sup>(1),(2)</sup> によって求められ, 無限遠方で一様流 ( $U_\infty = -(a_1^2\Omega_1/|\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2|)\mathbf{e}_x$ ) が生成されることが指摘されている. これは無限遠方での境界条件と矛盾することから, Jefferyのパラドックスと呼ばれており未解決問題の一つである. Watson<sup>(3),(4)</sup> はこの問題を漸近解析によって検討し, 外部流れは Navier-Stokes 方程式に支配され, その内部展開は  $\psi \sim (C \log r + D)r \sin \theta$  で表現されることを明らかにした. ここで,  $\psi$  は流れの関数,  $r = |x|$ ,  $\theta$  は偏角,  $C$  と  $D$  は未定定数を表し, この  $C, D$  の値は陽的には決定されない. そこで, Elliotら<sup>(5)</sup> は外部流れの関数形を仮定し, 境界要素法によってその値を評価している. 前稿<sup>(6)</sup> では静止流体中を一对の円柱が急回転と同時に一様流を受ける非定常問題について漸近解析を用いて扱い, 次の二つの極限操作を行うことにより Jefferyのパラドックスに関する検討を行った; (1) 時刻を無限大にした後に一様流速をゼロにする, (2) 一様流速をゼロにした後に時刻を無限大にする. このうち, (2)の極限操作を行うことにより, 外部境界条件を満足する外部解を決定することができ, Jefferyのパラドックスを解決するための指針を与えた.

また前稿<sup>(7)</sup> では, 静止流体中を一对の円柱が互いに反対方向に急回転するときの非定常流れについて渦粒子法を用いて数値計算し, その擬定常流れの結果をもとに, 2円柱間距離, レイノルズ数

<sup>1</sup> 【原稿受付】2018年7月24日, 【掲載決定】2018年9月19日

<sup>2</sup> 【主著者連絡先】 植田芳昭 摂南大学, 准教授 e-mail: yoshiaki.ueda@mec.setsunan.ac.jp  
〒572-8508 大阪府寝屋川市池田中町17-8, 摂南大学理工学部機械工学科

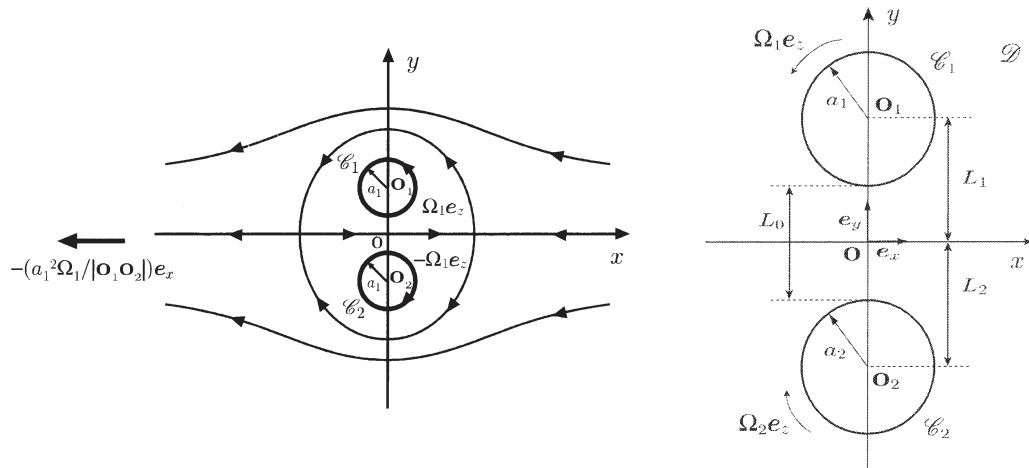


図1 Jefferyのパラドックスとその座標系 ( $a_1 = a_2$ ,  $\Omega_2 = -\Omega_1$ ) (6),(7)

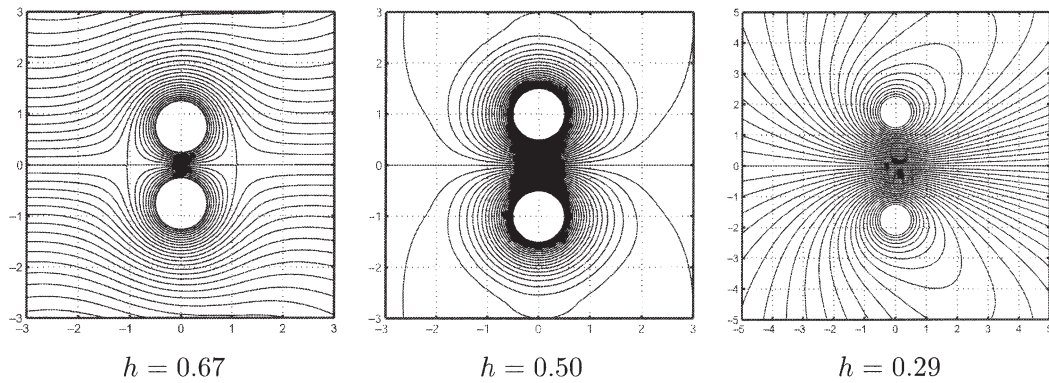


図2 互いに反対方向に回転する一対の円柱まわりの流線 ( $Re_\omega = 1.25$ ,  $h = 2a_1/|\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2|$ ) (7)

$Re_\omega = |\Omega|a^2/\nu$ の影響について検討した. ここでは, 特に, 2円柱間距離に応じて3種類の流れ場が形成され(図2参照), 時間の経過と共にJeffery流れを含む各擬定常流れが形成されるシナリオについて明らかにしている. その数値計算に用いた渦粒子法(8)-(10)は, 本質的に無限遠方での境界条件を自然に満足するという特徴をもっていることから, Jeffery流れを扱うには適した手法であると考えられる.

互いに反対方向に回転している一対の円柱が一樣流中に置かれた場合の数値計算に関しては, いくつかの研究報告が挙げられる(11)-(14). それらの研究報告では, 一樣流速をもとにしたレイノルズ数  $Re$  は  $40 \leq Re \leq 160$  の範囲に設定されており, 2円柱間距離や一樣流速に対する回転角速度の影響について検討されている. 前稿(7)やOuら(15)は, Jefferyのパラドックスで誘起される一樣流  $U_\infty = -(a_1^2\Omega_1/|\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2|)\mathbf{e}_x$  を遠方場の境界条件として与えることにより, その生成メカニズムについて検討している.

上述のように, 互いに反対方向に回転運動する2円柱まわりの流れの場合, 上下に対称な流れとなり,  $x$ 軸方向に一樣な流れが形成される. 本稿では, 円柱を4つにすることにより, 上下だけでなく左右にも流れの対称性を有する問題に対して(例えば, 図2), 無限遠方で形成される一樣流れの存在について, 数値計算により検討することを主たる目的としている.

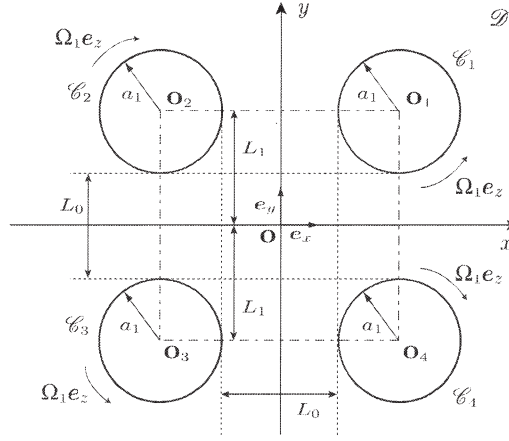


図3 互いに反対方向に回転する4円柱まわりの流れとその座標系

## 2. 数値計算手法

粘性流体中  $\mathcal{D}$  で等しい半径  $a_n = a$  を持つ4つの円柱  $\mathcal{C}_n$  ( $n = 1, 2, \dots, 4$ ) が互いに反対方向に回転運動する問題について考える (図3参照). 時刻  $t \rightarrow +0$  に, これらの円柱が動粘性係数  $\nu$  の流体中を一定角速度  $\pm \Omega e_z$  で急回転する. そのとき, 渦度場  $\omega$  および速度場  $\mathbf{u}$  は次の渦度輸送方程式で記述される.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = (1/Re_\omega) \nabla^2 \omega \quad \text{in } \mathcal{D} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{and} \quad \omega = (\nabla \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_z \quad \text{in } \mathcal{D} \quad (2)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}; t) = (-1)^{n+1} H(t) \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{O}_n \mathbf{M} / a \quad \text{on } \mathcal{C}_n = \{\mathbf{M}, |\mathbf{O}_n \mathbf{M}| = 1\} \quad \text{for } n = 1, 2, \dots, 4 \quad (3)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}; t) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{and} \quad \oint_{\mathcal{C}_r} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \rightarrow 0 \quad \text{as } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (4)$$

ただし, レイノルズ数  $Re_\omega$  は  $Re_\omega := |\Omega| a^2 / \nu$  で定義され,  $H$  はヘビサイドの超関数である.

支配方程式である渦度方程式 (1) はスプリット法により, オイラー方程式と粘性拡散方程式に分離して計算される<sup>(16)</sup>. オイラー方程式はパネル法によって解かれる. パネル法では, 円柱表面を  $m$  枚のパネルに分割し, パネル上に強さを未知数とする特異関数 (一様強さ  $\gamma$  の循環) を分布させ, 円柱表面上での境界条件を満足させるように, その強さを決定する<sup>(17)</sup>. 粘性拡散方程式を解く際には Particle Strength Exchange (PSE) 法を用いる<sup>(18)</sup>. その際, 極低レイノルズ数流れの計算における PSE 法の安定性を満足するように, 時間ステップ  $\Delta t$  の値は十分小さくとっている. 本計算では, カットオフ関数としてガウス関数を用い, 渦粒子を移流させるときに必要な速度はビオ・サバールの法則によって求める. 離散渦法では, 離散渦粒子を求積する際にノイズが生じる. このノイズを除去するために, 本計算では3次モーメントまで保存するスムージング関数を用いて, 格子上に再配分する. 本計算で用いたパネル数  $m$  と時間ステップ  $\Delta t$  の値はそれぞれレイノルズ数  $Re_\omega$  に応じて表1に示してある. なお, 本稿で扱う数値計算手法の詳細については, 前稿<sup>(7)</sup>で極低レイノルズ数流れに適用した場合における計算精度の検証を含めて扱っているので参照されたい.

## 3. 数値計算結果および考察

本稿では, 半径  $a_n$  を持ち, 中心が  $(X_n, Y_n)$  にある4つの円柱が図3に示す角速度  $\Omega_n = (-1)^{n+1} |\Omega_1| \mathbf{e}_z$  で回転運動を始めてから長時間経過 ( $t = 100$  まで計算) した後の流れについて検討する. 図3から, 円柱間距離  $\mathbf{O}_3 \mathbf{O}_2 = \mathbf{O}_4 \mathbf{O}_1 = (2a_1 + L_0) \mathbf{e}_y$  および  $\mathbf{O}_2 \mathbf{O}_1 = \mathbf{O}_3 \mathbf{O}_4 = (2a_1 + L_0) \mathbf{e}_x$  は共にパラメータ  $h = 2a_1 / |\mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2|$  を用いて無次元化される. このとき,  $0 \leq h < 1$  である.

表 1 計算条件

$Re_\omega$	$(X_n, Y_n)$	$a_n$	$\Omega_n$	$h$	$m$	$\Delta t$
1.25	$(\pm 0.60, \pm 0.60)$	0.5	$\pm 1.0$	0.83	96	$3.19 \times 10^{-3}$
1.25	$(\pm 0.70, \pm 0.70)$	0.5	$\pm 1.0$	0.71	96	$3.19 \times 10^{-3}$
1.25	$(\pm 0.80, \pm 0.80)$	0.5	$\pm 1.0$	0.63	96	$3.19 \times 10^{-3}$
1.25	$(\pm 0.90, \pm 0.90)$	0.5	$\pm 1.0$	0.56	96	$3.19 \times 10^{-3}$
1.25	$(\pm 1.00, \pm 1.00)$	0.5	$\pm 1.0$	0.50	96	$3.19 \times 10^{-3}$
1.25	$(\pm 1.75, \pm 1.75)$	0.5	$\pm 1.0$	0.29	96	$3.19 \times 10^{-3}$
0.125	$(\pm 0.70, \pm 0.70)$	0.5	$\pm 1.0$	0.71	72	$5.66 \times 10^{-4}$
2.5	$(\pm 0.70, \pm 0.70)$	0.5	$\pm 1.0$	0.71	112	$9.36 \times 10^{-3}$
20	$(\pm 0.70, \pm 0.70)$	0.5	$\pm 1.0$	0.71	112	$1.87 \times 10^{-2}$
40	$(\pm 0.70, \pm 0.70)$	0.5	$\pm 1.0$	0.71	128	$2.87 \times 10^{-2}$
80	$(\pm 0.70, \pm 0.70)$	0.5	$\pm 1.0$	0.71	192	$2.55 \times 10^{-2}$
120	$(\pm 0.70, \pm 0.70)$	0.5	$\pm 1.0$	0.71	240	$2.05 \times 10^{-2}$

本稿で扱う円柱群の幾何学的レイアウトとレイノルズ数に関する諸条件は表 1 に示す通りである。

### 3-1 円柱間距離の影響

本節では、まずレイノルズ数  $Re_\omega = 1.25$  のもとで、円柱間距離に関するパラメータ  $h$  が種々に変化した場合の円柱まわりの流れの様子について調べる。上述したように、2 円柱の場合については前稿<sup>(7)</sup>で数値解析を行っており、流れのパターンは図 2 に示す 3 種類に大別できることが明らかとなっている。

図 4 は、パラメータ  $h$  を 0.83 から 0.29 の間で変化させたときの円柱まわりの流線を描いたものである。この結果から、2 円柱の場合と類似して、形成される流れのパターンは次の 3 種類に分類される<sup>†</sup>：

- (i)  $h \gtrsim 0.6$  のとき： 4 つの円柱を取り囲む閉じた流線が形成される（流線が閉じることにより、よどみ点が  $x$  軸、 $y$  軸上の正・負側にそれぞれ 2 つずつ現れる）。この閉じた流線上に現れるよどみ点は、円柱間距離が大きくなるほど原点  $\mathbf{O}$  から離れた位置に現れる（図 5 参照）。閉じた流線の中には、各円柱のまわりに円柱の回転方向と同じ回転流れが生じ、閉じた流線の外側では、各象限内にそれとは反対方向の循環流れが形成される。
- (i')  $h \approx 0.5$  のとき： 4 つの円柱を取り囲む閉じた流線が形成されるが、その外部領域には循環流れはほとんど形成されない。ただし、このとき 2 円柱の場合には、閉じた流線は形成されない（図 2 参照）。
- (ii)  $h \lesssim 0.4$  のとき： 円柱間距離が離れた場合には、閉じた流線の外部領域で形成された循環流れが遠方に移流してしまうため、閉じた流線は形成されない（つまり、よどみ点は出現しない）。実際、図 5 から分かるように、 $x$  軸上正側に現れるよどみ点の位置  $x_g^+$  は円柱間距離が離れるにつれて原点  $\mathbf{O}$  から遠ざかり、 $h \lesssim 0.5$  付近で消失する。

図 2 と図 4 を見比べれば、円柱が 4 つあることに応じて流れの領域が増えているものの、形成される流れのパターンは本質的に同じであるように見える。ただし、2 円柱の場合<sup>(7)</sup>に比べて、遠方場に

<sup>†</sup> 2 円柱の場合における、静止状態から擬定常流れへと発展する過程は文献<sup>(7)</sup>の図 18 に示されている。4 円柱の場合における擬定常流れへの発展過程も、本質的に 2 円柱の場合と同じであることから適宜参照されたい。



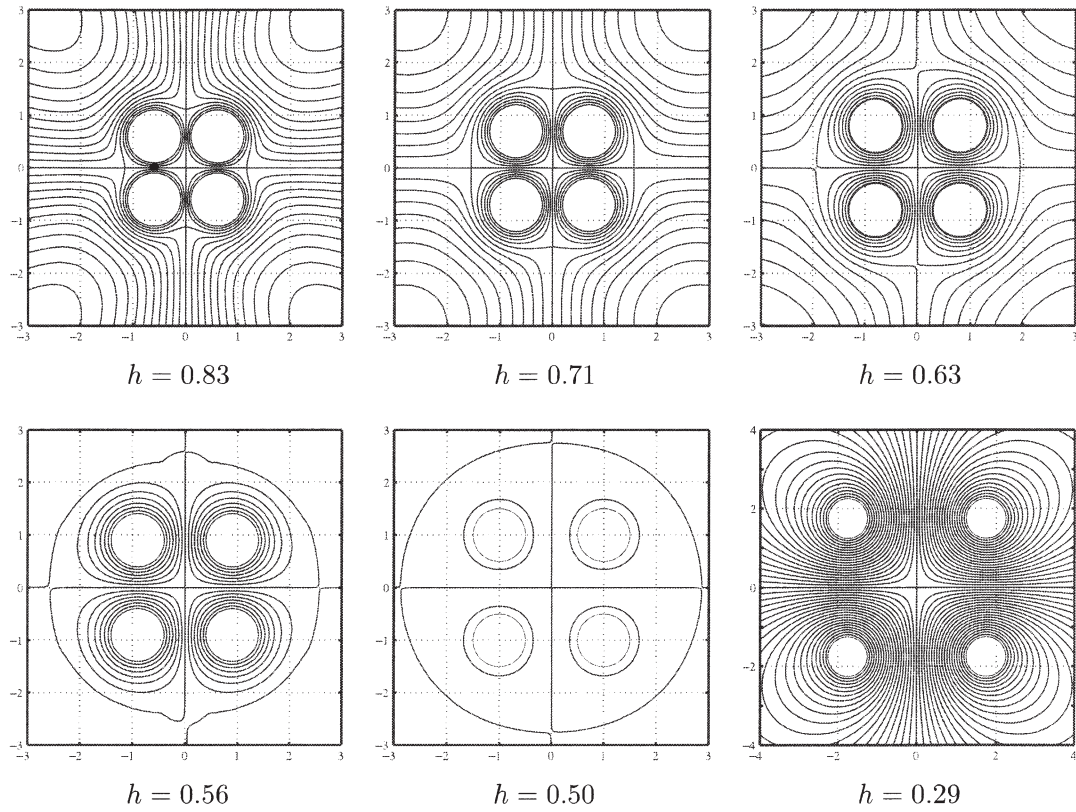


図4 互いに反対方向に回転する4円柱まわりの流線 ( $Re_\omega = 1.25$ ,  $t = 100$ )

誘起される一様流速は、円柱  $\mathcal{C}_2$  と  $\mathcal{C}_3$  のペアが誘起する一様流と円柱  $\mathcal{C}_1$  と  $\mathcal{C}_4$  のペアが誘起する一様流が打ち消しあうことにより、 $h = 0.71$  のときに約 15%， $h = 0.29$  のときに約 30% 小さくなる。それにより、2円柱の場合には  $h \approx 0.5$  で閉じた流線は消失してしまっているが（図2参照）、4円柱の場合には弱いながらも形成されており、 $h \gtrsim 0.6$  の場合に見られるパターン (i) と類似した流れの様子となっている<sup>‡</sup>。図6と図7は、それぞれ種々な円柱間距離  $h$  に応じた、 $x = 4, 6, 10$  における  $x$  軸上の  $x$  方向速度  $u(x, 0)$ 、および  $x = 6$  上での  $x$  方向速度分布  $u(6, y)$  を示している。これらの結果から、閉じた流線が形成される場合と形成されない場合で、遠方場で誘起される一様流成分の方向が逆になることが理解できる。

### 3-2 回転レイノルズ数 $Re_\omega$ の影響

本節では、円柱間距離を  $h = 2a_1/|\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2| = 0.71$  で一定にしておき（閉じた流線が現れる条件）、円柱の回転角速度  $\Omega$  に基づくレイノルズ数  $Re_\omega = |\Omega|a^2/\nu$  を 0.125 から 120 まで変化させることによって、流れのパターンに及ぼす対流の影響について調べる。

前稿<sup>(7)</sup>では、流れ場の定常解への収束性について検討するために、厳密解を求めることができる非定常問題の一例として、半径  $r = 1$  の円柱が静止状態から急回転するときの過渡的流れを取り上げた。それによると、円柱まわりの速度場  $u$  は、 $t \gg 1$  において、

$$u(r, t) = \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{Re_\omega r^2}{4t} \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right) + o\left(\frac{Re_\omega r^2}{t}\right) \right] \quad (5)$$

<sup>‡</sup>図2に見られるように、2円柱の場合には、 $h \approx 0.5$  のときの流れは、 $h \lesssim 0.4$  のときの流れの様子（パターン (ii)）に類似しているため、パターン (ii') と分類している<sup>(7)</sup>。

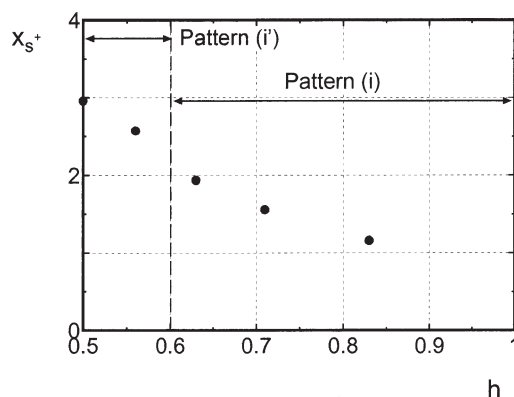


図5 円柱間距離に対する  $x$  軸上（正側）のよどみ点の位置 ( $Re_\omega = 1.25$ ,  $t = 100$ )

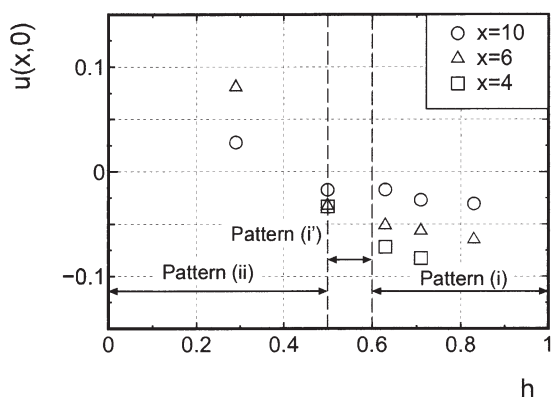


図6  $x$  軸上の  $x$  方向速度  $u(x, 0)$  ( $Re_\omega = 1.25$ ,  $t = 100$ )

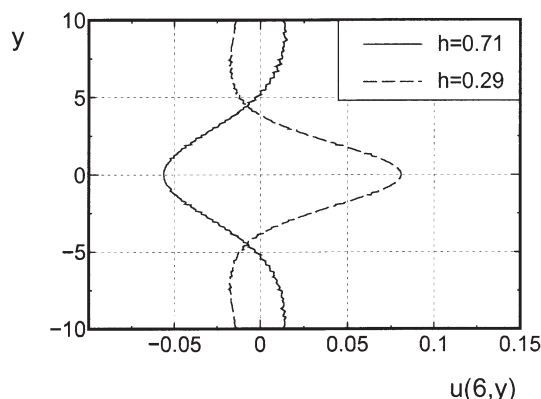


図7  $x = 6$  における  $x$  方向速度  $u(6, y)$  の比較 ( $Re_\omega = 1.25$ ,  $t = 100$ )

のように表され<sup>§</sup>, 流れ場の全領域（特に,  $r \gg 1$  の遠方場）で定常解を得るためには, 運動開始後  $t \gg Re_\omega r^2$  程度の時間を要することを明らかにしている.

図8は, レイノルズ数  $Re_\omega$  を変化させたときの円柱まわりの流線を描いたものである. 参考のため, 式(5)に含まれる非定常成分の残差がどの程度であるのか把握するために, 図中には  $r = (t/Re_\omega)^{1/2}$  の円を破線で示してある. 時間原点で円柱が急回転を始めることによって生成される流れの非定常成分は, 時間の経過と共に遠方場へ拡散・移流するが,  $r = (t/Re_\omega)^{1/2}$  の外側領域では非定常成分はまだ残っていることになる. 参考のため, 図9には前稿<sup>(7)</sup>で得られた2円柱の場合の流線を示してある. 2円柱の場合には, レイノルズ数の増加につれて, 対流の影響により円柱後方にウェイクを形成し,  $y$  軸に関する対称性は崩れてしまう様子が見取れる. それに対して, 4円柱の場合には  $x$  軸,  $y$  軸に関する対称性は共に保たれており, 流れのパターンに関するレイノルズ数の影響は本稿で扱う範囲内 ( $Re_\omega \leq 160$ ) においては本質的に無いように見受けられる. しかしながら, 正確によどみ点の位置を調べれば図10のようになり, レイノルズ数の値が大きくなるほど  $x$  軸方向に対流の影響を受け,  $x$  軸上のよどみ点の位置  $x_s^+$  は下流へ移ることが確認できる. それに伴い, 閉じた流線の外部領域に存在する循環流れも,  $y$  軸方向に移動している. これは Jeffery 流れの計算で現れた, 外部の循環流れが  $x$  軸の負側に移動することに対応していると考えられる<sup>(7)</sup> (図9参照). つまり, 第1, 第4象限の2円柱 ( $\mathcal{C}_1$  と  $\mathcal{C}_4$ ) と, 第2, 第3象限の2円柱 ( $\mathcal{C}_2$  と  $\mathcal{C}_3$ ) がそれぞれ  $x$  軸に沿って生成する

<sup>§</sup>式(5)に含まれる  $o$  はスモールオーダを表しており, 次式のように定義される:  $f(\epsilon) = o[\delta(\epsilon)]$  as  $\epsilon \rightarrow 0$  if  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(\epsilon)/\delta(\epsilon) = 0$ .

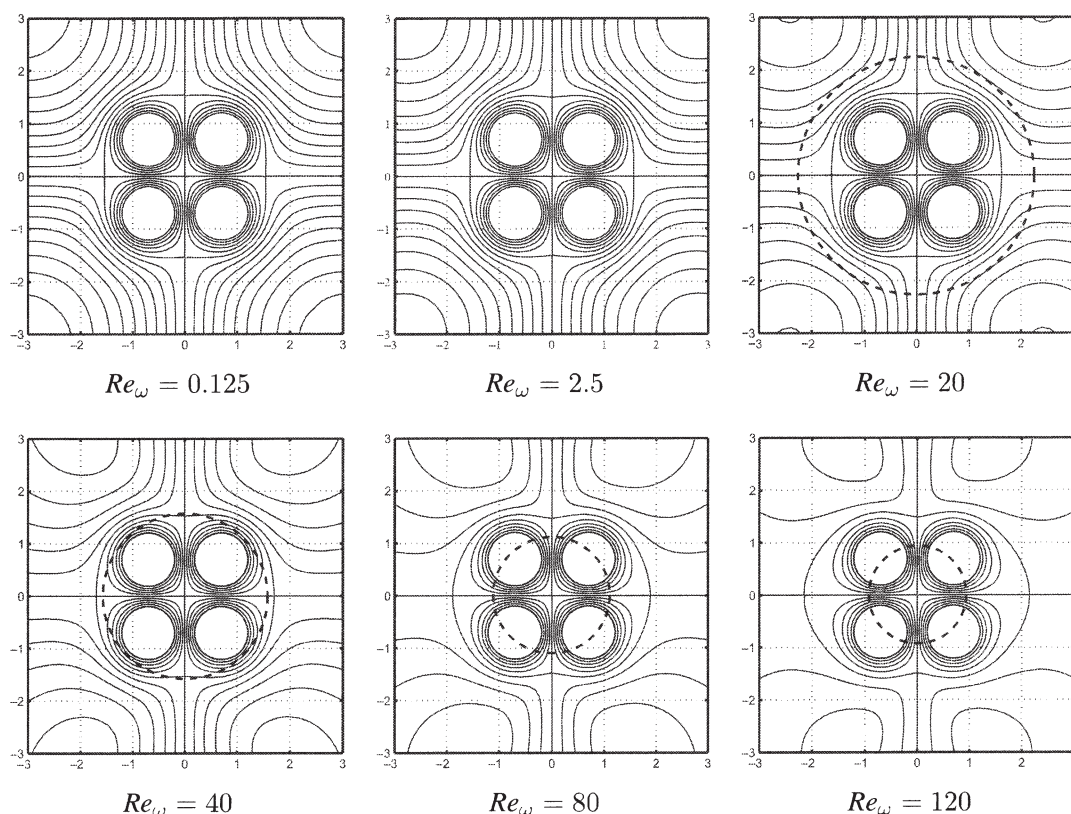


図8 互いに反対方向に回転する4円柱まわりの流線 ( $h = 0.71$ ,  $t = 100$ )

流れは、Jeffery 流れと同じく  $Re_\omega$  が大きくなると噴流のような流れになり、円柱の周速度よりも速く外部に流出する。一方、 $y$  軸に沿って両円柱に流れ込む流れは、円柱の回転によって引き込まれる流れであり、 $x$  軸方向の噴流よりも平坦な速度分布になっていると考えられる。ただし、流量は吸い込み側と吹き出し側で同じでなければならないので、噴流側では円柱の周速度よりも速度分布が遅くなる（速度分布の凹んだ）領域があり、 $x$  軸上ではその領域の流量だけ速くなっており、噴流のような流れとなっていると考えられる。

#### 4. おわりに

一對の円柱が互いに反対方向に回転するとき、遠方場に一様流を生成する。この流れについては、前稿<sup>(7)</sup>で円柱間距離、レイノルズ数の影響について詳細に調べている。本稿では、2円柱問題のときに見られた流れのパターンが、円柱が4つになった場合、どのように変化するかを検証することを目的として、渦粒子法を用いて数値計算を行った。得られた知見は次のとおりである。

- 低レイノルズ数 ( $Re_\omega = 1.25$ ) において、2円柱問題で見られた流れのパターンは円柱が4つになった場合でも同様に観察された。
- しかしながら、遠方場で誘起される一様流は、 $x$  軸負側の2円柱と  $x$  軸正側の2円柱が誘起する成分がお互いに打ち消し合うことにより、その強さは弱くなる。
- それに伴い、2円柱の場合には閉じた流線が形成されなかった配置 ( $h \approx 0.5$ ) でも、閉じた流線が形成された。
- レイノルズ数が大きくなった場合、対流の影響が現れるが、2円柱の場合と違い、4円柱の場合には  $x$  軸と  $y$  軸の両軸に関する流れの対称性が保たれる。

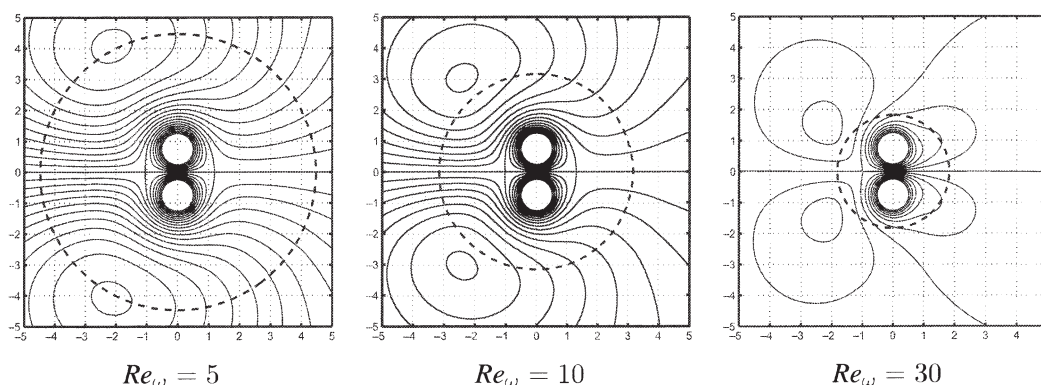


図9 互いに反対方向に回転する一対の円柱まわりの流線 ( $h = 0.67$ ,  $t = 100$ ) (7)

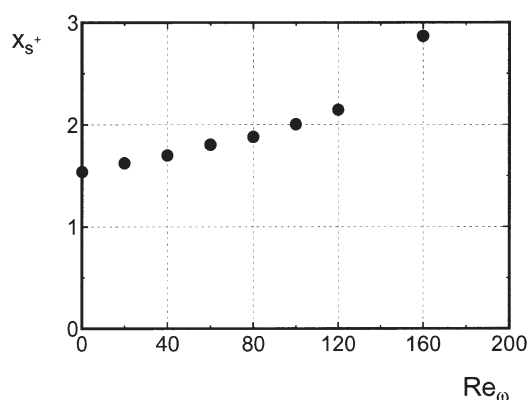


図10 互いに反対方向に回転する4円柱近傍に形成されるよどみ点の位置  $x_s^+$  ( $x$ 軸上正側)

互いに反対方向に回転運動をする4つの円柱のうち、第1象限と第4象限の2円柱 ( $\mathcal{C}_1$  と  $\mathcal{C}_4$ ) が生成する流れについて考えれば2円柱問題における Jeffery 流れと同じであるが、本稿のように円柱が4つに増えた場合には、鏡像法の考えに基づけば、 $y$ 軸が境界面のような役割をしていると見なすことができる。そのように考えれば、 $x$ 軸方向に一樣流を生成するためには、 $y$ 軸方向から回転円柱に向かう流れが必要となる。そのような場合、

- 無限遠方で一樣流のような流れが生じていても、このような  $y$ 軸に沿って円柱群に流れ込む流れを生じさせることは可能なのか？
- あるいは、Jeffery のパラドックスのような無限遠方で一樣流のような流れは生じずに速度はゼロに収束するのか？

といった疑問が残る。これらに関しては、今後、詳細に検討する予定である。

#### 参考文献

- (1) Jeffery, G.B., “Plane stress and plane strain in bipolar co-ordinates,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, **221** (1920), pp.265–293.
- (2) Jeffery, G.B., “The rotation of two circular cylinders in a viscous fluid,” *Proceedings of the Royal Society of London A*, **101** (1922), pp.169–174.
- (3) Watson, E.J., “The rotation of two circular cylinders in a viscous fluid,” *Mathematika*, **42** (1995), pp.105–126.



- (4) Watson, E.J., "Slow viscous flow past two rotating cylinders," *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **49** (1996), pp.195–215.
- (5) Elliott, L., Ingham, D.B. and Ei Bashir, T.B.A., "Stokes flow past two circular cylinders using a boundary element method," *Computers and Fluids*, **24** (1995), pp.787–798.
- (6) Ueda, Y., Sellier, A., Kida, T. and Nakanishi, M., "On the low-Reynolds-number flow about two rotating circular cylinders," *Journal of Fluid Mechanics*, **495** (2003), pp.255–281.
- (7) Ueda, Y., Kida, T. and Iguchi, M., "Steady approach of unsteady low-Reynolds-number flow past two rotating circular cylinders," *Journal of Fluid Mechanics*, **736** (2013), pp.414–443.
- (8) Ueda, Y., Sellier, A. and Kida, T., "Analysis of unsteady interactions between cylinders by a Vortex Method," *Proc. 3rd International Conference on Vortex Flow and Vortex Models*, (2005), CD-ROM.
- (9) Cottet, G.-H. and Koumoutsakos, P.D., "Vortex Methods: Theory and Practice.," Cambridge University Press, (2000).
- (10) Ploumhans, P. and Winckelmans, G.S., "Vortex Methods for high-resolution simulations of viscous flow past bluff bodies of general geometry," *Journal of Computational Physics*, **165** (2000), pp.354–406.
- (11) Kang, S., "Characteristics of flow over two circular cylinders in a side-by-side arrangement at low Reynolds numbers," *Physics of Fluids*, **15** (2003), pp.2486–2498.
- (12) Yoon, H.S., Kim, J.H., Chun, H.H. and Choi, H.J., "Laminar flow past two rotating circular cylinders in a side-by-side arrangement," *Physics of Fluids*, **19** (2007), p.128103.
- (13) Yoon, H.S., Chun, H.H., Kim, J.H. and Park, I.L.R., "Flow characteristics of two rotating side-by-side circular cylinder," *Computers and Fluids*, **38** (2009), pp.466–474.
- (14) Xu, S.J., Zhou, Y. and So, R.M.C., "Reynolds number effects on the flow structure behind two side-by-side cylinders," *Physics of Fluids*, **15** (2007), pp.1214–1219.
- (15) Ou, K., Liang, C., Premasuthan, S. and Jameson, A., "High-order spectral difference simulation of laminar compressible flow over two counter-rotating cylinders," *Proc. 27th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, AIAA, (2009), No.2009-3956.
- (16) Beale, J.T. and Majda, A., "High Order accurate vortex methods with explicit velocity kernels," *Journal of Computational Physics*, **58** (1985), pp.188–208.
- (17) Koumoutsakos, P., Leonard, A. and Pépin, F., "Boundary conditions for viscous vortex methods," *Journal of Computational Physics*, **113** (1994), pp.52–61.
- (18) Degond, P. and Mas-Gallic, S., "The weighted particle method for convection–diffusion equations, part 1: The case of an isotropic viscosity, part 2: The anisotropic case," *Mathematics of Computation*, **53** (1989), pp.485–525.