境界条件から得られる無限和の性質[1]
Some properties of the infinite sum obtained from the boundary conditions

小林俊公　　摂南大学理工学部 基礎理工学機構
島田伸一 [2]　摂南大学理工学部 基礎理工学機構

KOBAYASHI, Toshimasa　**Institute for Fundamental Sciences, Faculty of Science and Engineering, Setsunan University**

SHIMADA, Shinichi　**Institute for Fundamental Sciences, Faculty of Science and Engineering, Setsunan University**

Abstract

All possible selfadjoint extensions $\mathcal{X}$ of $H_{00} = -(\frac{d}{dx})^2$, whose domain is $C^\infty-$functions with compact support on open interval $(0,1)$ is obtained. It is shown that there is a bijection between $\mathcal{X}$ and all 2×2 unitary matrices $U(2)$. We characterize all selfadjoint extensions in terms of boundary conditions. Among $\mathcal{X}$, we consider selfadjoint operators H_α with real parmeter α $(H_\alpha u(x) = -u''(x), u(0) = 0, \alpha u'(1) = u(1))$. We find the inverse sum $S(\alpha)$ of the all positive eigenvalues of H_α by applying the trace formula and examine the properties of $S(\alpha)$. It can be seen that the property of $S(\alpha)$ changes greatly depending on whether H_α has a zero eigenvalue or a negative eigenvalue.

キーワード：自己共役拡張，境界条件，トレースの公式，無理数，超越数

Keywords : selfadjoint extension, boundary condition, trace formula, irrational number, transcendental number

１．序

微分作用素に対する固有値の和の漸近分布の理論について, min-max 原理, トレースの

[1] 【原稿受付】2021年9月11日,【掲載決定】2021年12月10日
[2] 【主著者連絡先】島田　伸一　　摂南大学，教授　e-mail：shimada@mpg.setsunan.ac.jp
〒572-8508　大阪府寝屋川市池田中町 17-8，摂南大学理工学部 基礎理工学機構

公式等豊富な手法と結果が蓄えられてきた[(1)]．この理論は量子力学の問題から出発しているので, 固有値の和自身が問題というよりむしろ, 固有値の和とポテンシャル・空間の体積・古典的物理量等との関係が問題にされてきた．一方, 無理数論・超越数論に現れる無限和は古典解析学 (特殊関数論) を出自としているものが多く, 作り出される関数等式は, 古典解析学の豊富な知識を必要とする．それに対して, 上記固有値の和の漸近分布の理論は, 関数解析学の上に立っており, 関数空間に基底が存在し, その基底を固有関数展開でかなり具体的に求めることができることを利用している．無限和を求める原理を固有関数展開に求め, 無理数論・超越数論に新たな例と手法を与えることができるかどうかを考えてみたい.

我々の問題意識を説明したい．Aubin の教科書[(2)] に, $x - \tan x = 0$ の正のゼロ点を小さい方から $(0 <)\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ とするとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{1}{10} \tag{1}$$

を示せという練習問題を見つけたのがそもそもの出発点である．その後, 宮島の教科書[(3)] に, トレースの公式で

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = \zeta(2) \tag{2}$$

を示すやり方を学んだとき, この手法が上記問題に適用できるのではないかという着想を得た．(1)，(2) は, それぞれ開区間 $I = (0, 1)$ 上で境界条件を持つ微分作用素 H_1, H_0 :

$$H_1u(x) = -u''(x), u(0) = 0, u'(1) = u(1); H_0u(x) = -u''(x), u(0) = u(1) = 0$$

の正の固有値の逆数和を考えているのであった．ただし, 作用素は自己共役でなければならない．作用素 H が自己共役であるとは, $H^* = H$ を満たすことである．H^* は H の共役作用素である．自己共役作用素を考える理由は, スペクトル分解定理が成り立つからである．これは固有関数の完全系が存在することの数学的表現である．フォン・ノイマンが非有界自己共役作用素のスペクトル分解定理を証明し, 量子力学のオブザーバブル (観測可能量) を自己共役作用素と同定し, 自己共役作用素の理論として量子力学を数学的に定式化したことは, よく知られている.

作用素が働く場として, I 上の複素数値ルベーグ 2 乗可積分関数全体のヒルベルト空間

$\mathcal{H} := L_2(I)$ をとる．内積は

$$(u, v) := \int_0^1 u(x)\overline{v(x)}dx$$

とする．I 上の複素数値無限回微分可能で, コンパクトサポートを持つ関数全体のベクトル空間を $C_0^\infty(I)$ とする．$\mathcal{H}$ 上の最小作用素 H_{00} を

$$\mathrm{Dom}(H_{00}) := C_0^\infty(I), \quad H_{00}u(x) := -u''(x)$$

で定義する．ここで $\mathrm{Dom}(H_{00})$ は H_{00} の定義域を表す．まず H_{00} の全ての自己共役拡張を求める．自己共役拡張は, 2×2 ユニタリ行列でパラメータ付けすることができ, 自己共役拡張全体 $\mathcal{X}$ と 2×2 ユニタリ行列全体 $U(2)$ の間には全単射が存在する．さらに全ての自己共役拡張を $x = 0, 1$ における境界条件で特徴付ける．作用素が単純なので, 特別な境界条件に対して自己共役拡張を与えることは, 関数解析学の教科書でも例を見つけることができる．$U(2)$ と $\mathcal{X}$ との対応関係を具体的に与え, $\mathcal{X}$ に属する作用素全てを, $U(2)$ の元を用いた境界条件で特徴付けを与えたことが, 新しい結果である．

次に無限和を考える．本論文では次の無限和の性質を調べる．α を実定数として, $\alpha x - \tan x = 0$ の正のゼロ点を小さい方から $(0 <)\lambda_1(\alpha) < \lambda_2(\alpha) < \cdots$ とするとき,

$$S(\alpha) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2(\alpha)}$$

とする．$S(\alpha)$ の解析は, 自己共役作用素 H_α として

$$H_\alpha u(x) = -u''(x), \quad u(0) = 0, \quad \alpha \cdot u'(1) = u(1)$$

を調べることに帰着する．$S(0) = \frac{1}{6}, S(1) = \frac{1}{10}$ を証明する．我々は $S(\alpha)$ の値を求めるのに, 次の形のトレースの公式 (の証明法) を用いる [(3)]．

$k(x, y)$ を $I \times I$ の連続関数で, 対称 $k(x, y) = k(y, x)$ かつゼロ以上 $k(x, y) \geqq 0$ とする．$\mathcal{H}$ 上の積分作用素 T を

$$Tu(x) = \int_0^1 k(x, y)u(y)dy \quad (u \in \mathcal{H})$$

で定義する．このとき T の正の固有値を重複度も込めて $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ と表すとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = \int_0^1 k(x, x)dx$$

が成り立つ.

我々は, トレースの公式を, $T = H_\alpha^{-1}$ で適用する. しかし $0 < \alpha < 1$ のときは, H_α に負の固有値が現れ, 対応する $k(x, y)$ はゼロ以上ではなくなるので, トレースの公式の証明法に戻って議論する必要がある. さらに H_1 はゼロ固有値をもち, H_1^{-1} は存在しない. この場合はゼロ固有空間とその直交補空間に $\mathcal{H}$ を直和分解して, 直和分解を保存する H_1^{-1} の類似物の積分作用素を構成し, この積分作用素にトレースの公式の証明の議論を適用するやり方をとる. よって $S(\alpha)$ の表現は, 作用素 H_α が負の固有値・ゼロ固有値を持つか否かで変わってくる. さらにゼロ固有値を持つ $\alpha = 1$ で $S(\alpha)$ の連続性も破れている.

最後に $S(\alpha)$ の数論的性質に進む. $S(\alpha)$ は, $\alpha > 1, \alpha \geqq 0$ のときは α の 1 次分数式で表されるので, α が有理数・無理数・代数的数・超越数のとき, $S(\alpha)$ も有理数・無理数・代数的数・超越数である. 無限和の超越性に関する例として, 塩川 [(4)] によれば, フィボナッチ数列 $\{F_n\}$:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\,(n \geqq 1), \quad F_0 = 0, F_1 = 1 \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

に対して,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^n}} = \frac{7-\sqrt{5}}{2}$$

が代数的数となる場合を唯一の例外として, 全ての整数 $a \geqq 2, b \geqq 0$ に対して,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{a^n+b}}$$

は超越数になる. この証明は, マーラーの方法と呼ばれるものを用いる. しかしこの方法は収束がベキ級数のようにかなり速いものに限定されているので, $S(\alpha)$ に適用できない. 超越数論の結果を用いれば, $0 < \alpha < 1$ で α が有理数のとき $S(\alpha)$ は無理数になる. $S(\alpha)$ の数論的性質と他の境界条件から得られる無限和の性質の解析はこれからの研究課題である.

2. H_{00} の自己共役拡張

開区間 $I = (0, 1)$ 上の L_2- 関数全体が作るヒルベルト空間 $\mathcal{H} = L_2(I)$ での最小作用素 H_{00} を

$$\mathrm{Dom}(H_{00}) := C_0^\infty(I), \quad H_{00}u(x) := -u''(x)$$

で定義した. H_{00} の全ての自己共役拡張 H を求める. まず以下の補題により共役作用素 H_{00}^* を特徴付けることができる.

2-1 補題

H_{00} の共役作用素 H_{00}^* は,

$$\mathrm{Dom}(H_{00}^*) = W_2(I), \quad H_{00}^* u(x) = -u''(x)$$

である．ここで $W_2(I)$ は, I 上の２階のソボレフ空間であり, 微分はシュワルツ超関数の意味でとる．特に $\mathrm{Dom}(H_{00}^*)$ の元に対して, 境界値 (トレース) $u(0), u'(0), u(1), u'(1)$ が一意的に定まる.

$u \in W_2(I)$ のとき, 測度ゼロを修正して, u は I で C^1- 級, u' が I で絶対連続となり, I 上ほとんど至る所２階導関数 u'' が存在する．よって部分積分が自由にできることに注意する.

2-2 証明

共役作用素の定義から $H_{00}^* u = -u''$ が超関数として存在する．$u, u'' \in \mathcal{H}$ から $u' \in \mathcal{H}$ が得られる (5)．これより境界値の存在も示せる (5),(6)．

次に H_{00} の閉包 $\overline{H_{00}}$ に関して以下の補題が成り立つ (5)．

2-3 補題

H_{00} の閉包 $\overline{H_{00}}$ の定義域は,

$$\mathrm{Dom}(\overline{H_{00}}) = \{u \in W_2(I); u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0\}$$

である．ただし作用は共役作用素と同じである．すなわち $\overline{H_{00}} u(x) = H_{00}^* u(x) = -u''(x)$.

共役作用素を用いて, 以下の補題で $\overline{H_{00}}$ の不足空間 $[\mathrm{Ran}(\overline{H_{00}} - \bar{z})]^{\perp}, [\mathrm{Ran}(\overline{H_{00}} - z)]^{\perp}$ を決める．ここで $\mathrm{Ran}(T)$ は作用素 T の値域である.

2-4 補題

$z = -2\pi^2 i$ のとき,

$$[\mathrm{Ran}(\overline{H_{00}} - \bar{z})]^{\perp} = \mathrm{L.h.}[f_1, f_2], \quad [\mathrm{Ran}(\overline{H_{00}} - z)]^{\perp} = \mathrm{L.h.}[g_1, g_2],$$

である．ここで $[\mathcal{M}]^{\perp}$ は $\mathcal{M}$ の直交補空間, $\mathrm{L.h.}[u, v]$ は u, v の１次結合全体を表す．また

$$f_1 = c_1 e^{\pi(1+i)x}, \quad f_2 = c_1 e^{\pi} e^{-\pi(1+i)x},$$

$$g_1 = c_1 e^{\pi(1-i)x}, \quad g_2 = c_1 e^{\pi} e^{\pi(-1+i)x}, \qquad c_1 = \left(\frac{2\pi}{e^{2\pi}-1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

であり, $\{f_1, f_2\}, \{g_1, g_2\}$ はそれぞれの不足空間の正規直交基底となっている.

2-5 証明

$(\overline{H_{00}})^* = H_{00}^*$ に注意すれば,

$$[\mathrm{Ran}(\overline{H_{00}} - \bar{z})]^{\perp} = \mathrm{Ker}(H_{00}^* - z)$$

が成り立つので, $-u'' - zu = 0$ を解けば, $e^{\pm\sqrt{-z}x}$ が基本解である. ここで $\mathrm{Ker}(T)$ は作用素 T のゼロ固有空間である. $z = -2\pi^2 i$ のとき, この 2 つの基本解は直交する. 後は正規化すれば良い. $[\mathrm{Ran}(\overline{H_{00}} - z)]^{\perp}$ についても同様である.

これらより, H_{00} の全ての自己共役拡張が, 2×2 ユニタリ行列をパラメータとして, 次のように得られる.

2-6 定理

2×2 ユニタリ行列 $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(2)$ に対して, H_{00} の自己共役拡張 $H(U)$ が,

$$\mathrm{Dom}\,(H(U)) := \left\{ u + (f_1, f_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (g_1, g_2) U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} ; u \in \mathrm{Dom}\left(\overline{H_{00}}\right), x_1, x_2 \in \mathbb{C} \right\},$$

$$H(U)v := H_{00}^* v \quad (v \in \mathrm{Dom}\,(H(U)))$$

により定まる. さらにこの対応 $U \mapsto H(U)$ は, $U(2)$ と H_{00} の自己共役拡張全体との間の全単射を与える. ここで $(f, g) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = fa + gb$ である.

2-7 証明

$z = -2\pi^2 i$ とする. フォン・ノイマンとケイリーによる自己共役拡張の処方箋 (7) によれば, H_{00} の自己共役拡張は, 次のように作られる.

(i) $\overline{H_{00}}$ のケーリー変換 $V_1 = (\overline{H_{00}} - z)(\overline{H_{00}} - \bar{z})^{-1}$ は $\mathrm{Ran}(\overline{H_{00}} - \bar{z})$ から $\mathrm{Ran}(\overline{H_{00}} - z)$ へのユニタリ作用素になる. 次に $[\mathrm{Ran}(\overline{H_{00}} - \bar{z})]^{\perp} = \mathrm{L.h.}[f_1, f_2]$ から $[\mathrm{Ran}(\overline{H_{00}} - z)]^{\perp} = \mathrm{L.h.}[g_1, g_2]$ へのユニタリ作用素 V_2 を作る. V_2 を

$$V_2 f_1 = a g_1 + c g_2, \quad V_2 f_2 = b g_1 + d g_2$$

と決めたとき, V_2 がユニタリ作用素であることと $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ がユニタリ行列であることは同値である．これは $\{f_1, f_2\}, \{g_1, g_2\}$ が正規直交基底を作っているからである．

(ii) $V = V_1 \oplus V_2$ は, $\mathcal{H} = \mathrm{Ran}(\overline{H_{00}} - \bar{z}) \oplus \mathrm{L.h.}[f_1, f_2]$ から $\mathcal{H} = \mathrm{Ran}(\overline{H_{00}} - z) \oplus \mathrm{L.h.}[g_1, g_2]$ へのユニタリ作用素になる．逆に V がユニタリ作用素ならば, U はユニタリ行列である．

(iii) このとき $H(U) := (z - \bar{z}V)(1 - V)^{-1}$ は H_{00} の自己共役拡張になる．また自己共役拡張は $H(U)$ で尽くされる．そして $H(U)$ の作用は H_{00}^* である．

(iv) 対応 $U \mapsto H(U)$ は全単射である．

これより $\mathrm{Dom}\,(H(U))$ の元 w は, $\mathcal{H}$ の元 v を

$$v = (\overline{H_{00}} - \bar{z})u + (f_1, f_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (u \in \mathrm{Dom}\,(\overline{H_{00}}))$$

と分解したとき,

$$\begin{aligned} w = (1 - V)v &= v - V_1(\overline{H_{00}} - \bar{z})u - V_2(f_1, f_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (\overline{H_{00}} - \bar{z})u + (f_1, f_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (\overline{H_{00}} - z)u - (V_2 f_1, V_2 f_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (z - \bar{z})u + (f_1, f_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (a g_1 + c g_2, b g_1 + d g_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (z - \bar{z})u + (f_1, f_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (g_1, g_2)U\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表すことができる．これは $\mathrm{Dom}(H(U))$ の元の特徴付けを示す．$H(U)$ の作用は,

$$\overline{H_{00}}u = H_{00}^* u \quad (u \in \mathrm{Dom}(\overline{H_{00}})), \quad H_{00}^* f_j = z f_j, \quad H_{00}^* g_j = \bar{z} g_j \quad (j = 1, 2)$$

を用いれば, H_{00}^* であることが確かめられる．

３．$H(U)$ の境界条件

$H(U)$ の定義域を $x = 0, 1$ における境界条件で特徴付けることを考える．この為に次の一般的な結果 [8] を適用すれば次の定理が得られる．

3-1 定理

H_{00} の自己共役拡張 $H(U)$ の定義域は,

$$\mathrm{Dom}(H(U)) = \{u \in \mathrm{Dom}(H_{00}^*); [u, w_1] = [u, w_2] = 0\}$$

で与えられる．ここで $w_1, w_2 \in \mathrm{Dom}(H(U))$ は

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 \in \mathrm{Dom}(\overline{H_{00}}) \Longrightarrow c_1 = c_2 = 0$$

を満たすもので,

$$\begin{aligned}[v, w] &= (H_{00}^* v, w) - (v, H_{00}^* w) \\ &= -v'(1)\overline{w(1)} + v'(0)\overline{w(0)} + v(1)\overline{w'(1)} - v(0)\overline{w'(0)}\end{aligned}$$

である.

境界条件をユニタリ行列で具体的に特徴付けると次の定理になる.

3-2 定理

$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(2)$ に対して, $v \in \mathrm{Dom}(H_{00}^*) = W_2(I)$ が $H(U)$ の定義域に入る為の必要十分条件は

$$\overline{A} \begin{pmatrix} v'(1) \\ v'(0) \end{pmatrix} = \pi(1+i)\overline{B} \begin{pmatrix} v(1) \\ v(0) \end{pmatrix}$$

を満たすことである．ここで

$$A = \begin{pmatrix} -e^\pi + ae^\pi + c & -1 + a + ce^\pi \\ -1 + be^\pi + d & -e^\pi + b + de^\pi \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -ie^\pi + ae^\pi - c & -i + a - ce^\pi \\ i + be^\pi - d & ie^\pi + b - de^\pi \end{pmatrix}$$

である.

3-3 証明

$\mathrm{Dom}(H(U))$ の元は,

$$u + (f_1, f_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (g_1, g_2) U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = u + x_1(f_1 - ag_1 - cg_2) + x_2(f_2 - bg_1 - dg_2).$$

ここで $u \in \mathrm{Dom}\left(\overline{H_{00}}\right), x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ であるから,

$$w_1 = f_1 - ag_1 - cg_2, \quad w_2 = f_2 - bg_1 - dg_2$$

にとり, 前定理を適用すれば良い.

3-4 例

いくつかの境界条件とユニタリ行列の対応を示す.

(i) ディリクレ境界条件: $v(0) = v(1) = 0$ は $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対応する.

(ii) ノイマン境界条件: $v'(0) = v'(1) = 0$ は $U = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ に対応する.

(iii) α を実数とするとき, 境界条件：$v(0) = 0,\ \alpha v'(1) = v(1)$ は

$$U = \frac{1}{(1-e^{2\pi}) + \alpha\pi(e^{2\pi}+1) - i\alpha\pi(e^{2\pi}+1)}$$
$$\times \begin{pmatrix} (1-e^{2\pi}) + \alpha\pi(e^{2\pi}+1) + i\alpha\pi(e^{2\pi}-1) & -2i\alpha\pi e^{\pi} \\ -2i\alpha\pi e^{\pi} & (1-e^{2\pi}) + \alpha\pi(e^{2\pi}+1) - i\alpha\pi(e^{2\pi}-1) \end{pmatrix}$$

に対応する.

4．境界条件から得られる無限和

これからは, 実パラメータ α を持つ, 次で定義される自己共役作用素 H_α のみを考える.

$$\mathrm{Dom}(H_\alpha) := \{u \in W_2(I); u(0) = 0, \alpha u'(1) = u(1)\}, \quad H_\alpha u(x) = -u''(x).$$

全ての実数 α に対して, H_α は固有関数からなる正規直交基底を持つことが知られている [(9),(6)]．すなわち, 異なる固有値に対応する固有関数は直交するので, 固有関数を全て求めて長さを１に正規化しておけば, 正規直交基底ができ上がる．H_α の固有値・固有関数が次のように得られる.

4-1 定理

(1) $\alpha \leqq 0$ または $\alpha > 1$ のとき, H_α のスペクトルは正の固有値 $\{\lambda_n^2(\alpha)\}_{n=1}^\infty$ のみである．ここで $\lambda_n(\alpha)$ は，$0 < \lambda_1(\alpha) < \lambda_2(\alpha) < \cdots$ を満たし, $\alpha x = \tan x$ の解である．そして固有値 $\lambda_n^2(\alpha)$ に対応する固有空間は，次元１で，固有関数

$$\varphi_n(x;\alpha) := \sqrt{2}\left(1 - \frac{\sin(2\lambda_n(\alpha))}{2\lambda_n(\alpha)}\right)^{-\frac{1}{2}} \sin(\lambda_n(\alpha)x)$$

から生成される．さらに $\{\varphi_n(x;\alpha)\}_{n=1}^\infty$ は, $\mathcal{H}$ の正規直交基底を作る.

(2) H_1 のスペクトルは正の固有値 $\{\lambda_n^2(1)\}_{n=1}^\infty$ とゼロ固有値のみである．そして固有値 $\lambda_n^2(1)$ の固有空間は，次元１で，固有関数 $\varphi_n(x;1)$ から生成される．またゼロ固有値に対応する固有空間も，次元１で，固有関数 $\varphi_0(x;1) := \sqrt{3}x$ から生成される．さらに $\{\varphi_n(x;1)\}_{n=0}^\infty$ は, $\mathcal{H}$ の正規直交基底を作る.

(3) $0 < \alpha < 1$ のとき, H_α のスペクトルは正の固有値 $\{\lambda_n^2(\alpha)\}_{n=1}^\infty$ と負の固有値 $-\lambda_-^2(\alpha)$ のみである．ここで $\lambda_-(\alpha)$ は $\alpha x = \tanh x$ の唯１つの正の解である．そして固

有値 $\lambda_n(\alpha)(n \geqq 1)$ の固有空間は，次元 1 で，固有関数 $\varphi_n(x;\alpha)$ から生成される．また $-\lambda_-^2(\alpha)$ に対応する固有空間も，次元 1 で，固有関数

$$\varphi_-(x;\alpha) = \left(\frac{2\lambda_-(\alpha)}{e^{2\lambda_-(\alpha)} - e^{-2\lambda_-(\alpha)}}\right)^{\frac{1}{2}} (e^{\lambda_-(\alpha)x} - e^{-\lambda_-(\alpha)x})$$

から生成される．さらに $\{\varphi_n(x;\alpha)\}_{n=1}^{\infty} \cup \{\varphi_-(x;\alpha)\}$ は, $\mathcal{H}$ の正規直交基底を作る.

4-2 証明

$H_\alpha u - \lambda u = 0$ は, 超関数の意味で

$$-u''(x) - \lambda u(x) = 0$$

が成り立つことを意味する．これより u は C^2- 級である [(6)]．よって後は普通に微分をして解けば良い.

H_α^{-1} を積分作用素の形で求める.

4-3 補題

$\alpha \neq 1$ のとき, H_α^{-1} が存在して

$$H_\alpha^{-1}u(x) = \int_0^1 k(x,y)u(y)dy, \quad k(x,y) = \begin{cases} x + \frac{xy}{\alpha-1} & (0 < x \leqq y < 1) \\ y + \frac{yx}{\alpha-1} & (0 < y \leqq x < 1) \end{cases}$$

である.

4-4 証明

$-y''(x) = 0$ の基本解系は $x, 1$ なので, $y(x) = A(x)x + B(x)$ の形で $-y'' = u$ を定数変化法で解けば良い.

H_1 は逆作用素を持たないので, 次の作用素を考える.

4-5 補題

$\mathcal{H}$ 上の積分作用素 T を

$$Tu(x) = \int_0^1 k(x,y)u(y)dy, \quad k(x,y) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}xy^3 & (0 < x \leqq y < 1) \\ y + \frac{1}{2}xy^3 & (0 < y \leqq x < 1) \end{cases}$$

で定義する．このとき $(u,\varphi_0(\cdot;1))=0$ を満たす $u\in\mathcal{H}$ に対して,

$$Tu\in\mathrm{Dom}(H_1),\quad H_1(Tu)=u,\quad (Tu,\varphi_0(\cdot;1))=0$$

が成り立つ.

4-6 証明

前補題と同様の形で, 条件を満たすように解けば良い.

以上の準備の下で, トレースの公式の証明をなぞって, 無限和

$$S(\alpha):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2(\alpha)}$$

の値を求めることができる.

4-7 定理

実数 α に対して, $S(\alpha)$ は次のようになる.

$$S(\alpha)=\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{1}{3(\alpha-1)} & (\alpha\leqq 0,\alpha>1)\\ \frac{1}{10} & (\alpha=1)\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3(\alpha-1)}+\frac{1}{\lambda_-^2(\alpha)} & (0<\alpha<1)\end{cases}$$

4-8 証明

(1) $\alpha\leqq 0,\alpha>1$ とする． $\{\varphi_n(x;\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$ は, $\mathcal{H}$ の正規直交基底を作るから, 任意の $u\in\mathcal{H}$ に対して

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}(u,\varphi_n(\cdot;\alpha))\varphi_n(\cdot;\alpha)$$

と展開できるから, $H_\alpha^{-1}\varphi_n(x;\alpha)=\frac{1}{\lambda_n^2(\alpha)}\varphi_n(x;\alpha)$ に注意して, ほとんど至る所の $x\in I$ に対して

$$\begin{aligned}H_\alpha^{-1}u(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}(u(y),\varphi_n(y;\alpha))H_\alpha^{-1}\varphi_n(x;\alpha)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(u(y),\varphi_n(y;\alpha))\frac{1}{\lambda_n^2(\alpha)}\varphi_n(x;\alpha)=\left(u(y),\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2(\alpha)}\varphi_n(y;\alpha)\overline{\varphi_n(x;\alpha)}\right)\end{aligned}$$

が成り立つ．さらに $\lambda_n(\alpha) = O(n)\,(n \to \infty)$ であることに注意すれば, 無限和は一様収束しており, 両辺ともに連続であるから, 実は全ての $x \in I$ に対して成り立っている．一方,

$$H_\alpha^{-1}u(x) = \int_0^1 k(x,y)u(y)dy = \left(u(y), \overline{k(x,y)}\right) = (u(y), k(x,y))$$

であるから,

$$k(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2(\alpha)} \varphi_n(y;\alpha)\overline{\varphi_n(x;\alpha)}$$

は x を固定する毎に, ほとんど全ての y に対して成り立つが, また右辺は一様収束しており, 両辺ともに連続であるから, 実は全ての $(x,y) \in I \times I$ に対して成り立っている．よって項別積分すれば,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{1}{3(\alpha-1)} &= \int_0^1 k(x,x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2(\alpha)} \int_0^1 |\varphi_n(x;\alpha)|^2 dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2(\alpha)} ||\varphi_n(\cdot;\alpha)||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2(\alpha)} = S(\alpha)\end{aligned}$$

が得られる．

(2) $0 < \alpha < 1$ とする．この場合は負の固有値があり, $\{\varphi_n(x;\alpha)\}_{n=1}^{\infty} \cup \{\varphi_-(x;\alpha)\}$ が $\mathcal{H}$ の正規直交基底を作る．これより

$$k(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2(\alpha)} \varphi_n(y;\alpha)\overline{\varphi_n(x;\alpha)} - \frac{1}{\lambda_-^2(\alpha)} \varphi_-(y;\alpha)\overline{\varphi_-(x;\alpha)}$$

が得られる．よって項別積分して

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3(\alpha-1)} = S(\alpha) - \frac{1}{\lambda_-^2(\alpha)}$$

となる．

(3) $\alpha = 1$ とする．$\{\varphi_n(x;1)\}_{n=0}^{\infty}$ は $\mathcal{H}$ の正規直交基底を作る．任意の $u \in \mathcal{H}$ に対して

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (u, \varphi_n(\cdot;1))\varphi_n(\cdot;1)$$

と展開できるから,

$$T\varphi_n(x;1) = \frac{1}{\lambda_n^2(1)} \varphi_n(x;1) \quad (n \geqq 1)$$

に注意して,

$$\begin{aligned}Tu(x) &= (u(y),\varphi_0(y;1))T\varphi_0(x;1)+\sum_{n=1}^{\infty}(u(y),\varphi_n(y;1))T\varphi_n(x;1)\\ &= \left(u(y),\varphi_0(y;1)\overline{T\varphi_0(x;1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2(1)}\varphi_n(y;1)\overline{\varphi_n(x;1)}\right)\end{aligned}$$

が成り立つ. これより

$$k(x,y)=\varphi_0(y;1)\overline{T\varphi_0(x;1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2(1)}\varphi_n(y;1)\overline{\varphi_n(x;1)}$$

となる. さらに計算して

$$T\varphi_0(x;1)=-\frac{\sqrt{3}}{6}x^3+\frac{3}{5}\sqrt{3}x$$

より,

$$k(x,x)=\varphi_0(x;1)\overline{T\varphi_0(x;1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2(1)}|\varphi_n(x;1)|^2$$

は

$$x+\frac{1}{2}x^4=\sqrt{3}x\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}x^3+\frac{3}{5}\sqrt{3}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2(1)}|\varphi_n(x;1)|^2$$

となるので,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2(1)}|\varphi_n(x;1)|^2=x+\frac{1}{2}x^4-\left(-\frac{1}{2}x^4+\frac{9}{5}x^2\right)=x^4-\frac{9}{5}x^2+x$$

となる. よって項別積分すれば

$$S(1)=\int_0^1(x^4-\frac{9}{5}x^2+x)dx=\frac{1}{5}-\frac{3}{5}+\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$$

が得られる.

5. $S(\alpha)$ の性質

まず $S(\alpha)$ の連続性を調べる.

5-1 定理

$S(\alpha)$ は $\alpha\neq 1$ で連続であり,

$$S(1+0)=+\infty,\quad S(1-0)=S(1)$$

である.

5-2 証明

$x^{-1}\tanh x$ は開区間 $(0,\infty)$ から開区間 $(0,1)$ への微分同相写像であることが逆写像定理から分かる. これより $\lambda_-(\alpha)$ も無限回微分可能で,

$$\lambda_-(+0)=\infty, \quad \lambda_-(1-0)=0$$

である. $S(\alpha)$ の表示から, まず $\alpha\neq 0,1$ で連続で,

$$S(-0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3(0-1)}=\frac{1}{6}=S(0), \quad S(+0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3(0-1)}+\frac{1}{\infty^2}=\frac{1}{6}=S(0)$$

より $\alpha=0$ でも連続である. 次に $S(1+0)=+\infty$ は明らかである. $\alpha\to 1-0$ のとき,

$$\beta:=\lambda_-(\alpha)\to +0$$

であり,

$$\alpha=\beta^{-1}\tanh\beta=1-\frac{1}{3}\beta^2+\frac{2}{15}\beta^4+O(\beta^6)$$

である. これより

$$\frac{1}{\alpha-1}=-\frac{1}{\beta^2}-\frac{2}{5}+O(\beta^2)$$

となるから

$$S(1-0)=\lim_{\beta\to+0}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta^2}-\frac{2}{5}+O(\beta^2)+\frac{1}{\beta^2}\right)=\frac{1}{10}=S(1)$$

である.

最後に $S(\alpha)$ の数論的性質を述べておく.

5-3 定理

(1) $\alpha>1, \alpha\leqq 0$ のとき, α が有理数・無理数・代数的数・超越数に応じて $S(\alpha)$ も有理数・無理数・代数的数・超越数である.

(2) $0<\alpha<1$ のとき, α が有理数ならば $S(\alpha)$ は無理数である.

5-4 証明

(1) は $S(\alpha)$ の表示から明らかである.

(2) $0 < \alpha < 1$, α は有理数とする．$\beta := \lambda_{-}(\alpha)$ とおく．$\beta^2 = \frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N})$ が有理数とすると,

$$q\beta^2 - p = 0$$

より, β は代数的数である．このときリンデマンの結果 (4)：複素数 z と e^z は同時に代数的数になることはない，を用いると e^β は代数的数ではない．一方 $\alpha\beta = \tanh\beta$ から

$$(\alpha^2\beta^2 - 1)(e^\beta)^4 + 2(\alpha^2\beta^2 + 1)(e^\beta)^2 + (\alpha^2\beta^2 - 1) = 0$$

が得られるので, e^β は代数的数であることになって矛盾が起こる．よって $\frac{1}{\beta^2}$ は無理数なので, $S(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3(\alpha-1)} + \frac{1}{\beta^2}$ は無理数である．

参考文献

(1) Eskin, G.,“Lectures on Linear Partial Differential Equations”, American Mathematical Society, (2010).

(2) Aubin, T.,“A Course in Differential Geometry”, American Mathematical Society, (2000).

(3) 宮島静雄,「関数解析」, 横浜図書, (1999).

(4) 塩川宇賢,「無理数と超越数」, 森北出版 , (1999).

(5) Weidmann, J.,“ Linear Operators in Hilbert Spaces”, Springer, Berlin, Heidelberg, (1980).

(6) 溝畑　茂,「積分方程式入門」, 朝倉書店, (1968).

(7) アヒエゼル・グラズマン,「ヒルベルト空間論下」, 共立出版, (1974).

(8) 伊藤清三, 吉田耕作,「函数解析と微分方程式」, 岩波書店, (1976).

(9) Folland, G. B.,“Fourier analysis and its applications”, Brooks/Cole Publishing Company, (1992).