摂南大学融合科学研究所論文集，第 8 巻　第 1 号，(2022)　研究論文

ベクトル空間理論における零元存在公理の独立性と公理系の一部を欠く集合から同値関係によるベクトル空間を作る一方法[1]

Independence of zero element existence axiom in vector space theory and a method of making vector spaces from sets in partial absence of the vector space axioms by using equivalence relation

小林俊公[2]　摂南大学理工学部 基礎理工学機構
島田伸一　摂南大学理工学部 基礎理工学機構

KOBAYASHI, Toshimasa　**Institute for Fundamental Sciences, Faculty of Science and Engineering, Setsunan University**
SHIMADA, Shinichi　**Institute for Fundamental Sciences, Faculty of Science and Engineering, Setsunan University**

Abstract

All mathematicians accept the axioms of vector space. Of course, there are people out there who do not. Some people try to derive the existence of zero element from other axioms. However, we can prove that the existence axiom of zero element is independent of other axioms as all mathematicians would think so. Furthermore, we introduce an equivalence relation to make vector spaces from sets in partial absence of the vector space axioms. We shall show that this equivalence relation has a strange property, and we found that there is a connection between the way of our making vector spaces and the construction of the Grothendieck group.

キーワード：ベクトル空間，ベクトル空間の公理，同値関係，グロタンディーク群
Keywords : vector space, axiom of vector space, equivalence relation, Grothendieck group

---

[1] 【原稿受付】2022 年 9 月 10 日，【掲載決定】2022 年 12 月 12 日
[2] 【主著者連絡先】小林　俊公　摂南大学，准教授　e-mail：kobayashi@mpg.setsunan.ac.jp
〒572-8508　大阪府寝屋川市池田中町 17-8，摂南大学理工学部 基礎理工学機構

1. はじめに

ベクトル空間は，理工系の大学１年生が微分積分と並行して学習する，線形代数における，中心的な興味の対象である．線形代数の教科書は現在数多く出版されているが，公理を用いてベクトル空間を定義することは共通している．公理の表現の仕方は教科書により差異があるため，ここでは日本数学会編集「岩波数学辞典 第４版」[(1)] におけるベクトル空間の定義を挙げる．ただし，ベクトルは太文字のアルファベットで，スカラー（定数）は通常の小文字のアルファベットで表す．

定義（ベクトル空間）

集合 L の任意の２元 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ にその和と呼ばれる L の元 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ が定められ，体 K の任意の元 α と L の任意の元 $\boldsymbol{a}$ に対してスカラー倍と呼ばれる L の元 $\alpha\boldsymbol{a}$ が定められているとする．

これについて次の条件 (i)-(viii) が成り立つとき、L は体 K 上の線形空間またはベクトル空間であるという：

(i) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

(ii) すべての $\boldsymbol{a}\in L$ に対して $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ となる零元 $\boldsymbol{0}$ がある．

(iii) 任意の $\boldsymbol{a}\in L$ に対し $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ となる元 $-\boldsymbol{a}\in L$ がある．

(iv) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(v) $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$

(vi) $(\alpha\beta)\boldsymbol{a}=\alpha(\beta\boldsymbol{a})$

(vii) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$

(viii) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

上の (i)-(viii) の条件のことをベクトル空間の公理という．高等学校の数学では単元としてベクトルは扱われているものの，大学１年生にとり，公理によって定義されるベクトル空間という抽象的な対象物は分かりやすいものとは言えず，授業を担当する教員としてはその点を十分留意する必要があると思われる．

そのような中で，ある著書 [(2)] のベクトル空間の公理の扱いに問題があることに気がついた．具体的には，上に挙げた条件の，(ii) と (iii) の２つの条件を除く６つの条件を仮定した集合において，(ii) と (iii) は定理として成り立つ，と書かれている点である．この著書では，(ii) と (iii) の２つの条件を除く６つの条件が成り立てば，任意の $\boldsymbol{a}\in L$ に対して

$$\boldsymbol{a}=1\boldsymbol{a}=(1+0)\boldsymbol{a}=1\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{a},$$
$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=1\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{a}=\{1+(-1)\}\boldsymbol{a}=0\boldsymbol{a}$$

が成り立つため，$0\boldsymbol{a}$ と $-\boldsymbol{a}$ がそれぞれ零元と $\boldsymbol{a}$ の逆元（$\boldsymbol{a}$ の逆元とは (iii) の条件を満たす $-\boldsymbol{a}$ のこと）である，としている．しかし，(ii) と (iii) の 2 つの条件を除く 6 つの条件が満たされるだけでは，$\boldsymbol{a}$ と異なる元 $\boldsymbol{b}$ に対して $0\boldsymbol{a} = 0\boldsymbol{b}$ となることを示すことができず，$\boldsymbol{b} + 0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ を導くことができないため，$0\boldsymbol{a}$ が零元であることは言えない．そして，零元が存在しなければ，L の各元の逆元は定義できない．

このように，一見，定理として示すことができるのでは，と思えても，示せないものが公理である．そのような公理の代表的なものとして，ユークリッド原論における第 5 公準である「平行線の公理」が挙げられる．「平行線の公理」が定理ではなく公理であることは，「平行線の公理」が成り立たない世界（いわゆる非ユークリッド幾何学）の存在が示された事による．これは平行線の公理がユークリッド幾何学の他の公理系から独立であることを意味する．では，ベクトル空間の公理の場合，実際に (ii) や (iii) の条件のみを満たさないような例にはどのようなものがあるのか考えてみると，その構成は余り容易ではない．手近にあるいくつかの線形代数の本 [(3),(4),(5),(6)] の中でも，ベクトル空間の公理を満たさない例として挙げられているものは，和やスカラー倍について閉じていないものしか見つけられないことから，線形代数の講義において紹介するベクトル空間ではない例としては，そのような“自明”なものがほとんどではないかと想像される．

そこで，セクション 2 では，(ii) や (iii) の条件のみを満たさないような例を構成する．これは，次の定理を証明したことになる．

定理　ベクトル空間の公理 (ii) の零元の存在は，他の公理系 (i)，(iv)〜(viii) からは導けない．すなわち，他の公理系からは独立である．

ここで，ベクトル空間の公理 (iii) の逆元の存在は，零元の存在に依存することを注意しておく．

この定理から，(ii) や (iii) の条件のみを満たさない集合 V からベクトル空間を作ることができるか，という問題が生じる．V が零元を持たない原因は，ある V の元 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$（ベクトル空間の公理を考える集合の要素は太文字のアルファベットで表す）に対して，

$$0 \cdot \boldsymbol{x} \neq 0 \cdot \boldsymbol{y}$$

となる場合があることである．これらが 1 つの同値類に入る同値関係を導入するれば良いというアイデアが浮かぶ．実際，ある同値関係を V に導入することにより，その商集合 $V/\!\sim$ はベクトル空間になること（このような操作を本稿では「ベクトル空間化」と呼ぶ）を，セクション 3 において証明する．ベクトル空間化は，それをベクトル空間に適用すると，得られる商集合は元のベクトル空間と線形同型になる，という意味で自然なものであ

る．しかしながら，この同値関係は奇妙な性質を持っている．$[\boldsymbol{x}]$ で同値類を表すとき，一般には

$$[0\cdot\boldsymbol{a}]\supset\{0\cdot\boldsymbol{v}\mid\boldsymbol{v}\in V\}$$

しか成り立たない．零元になりそうなものを集めても，零元の同値類は尽くせない，そのような例をセクション４で構成する．この事実からも，零元の存在が如何に特別なものであるか想像できる．この同値関係による商集合の構造は，思いの外，複雑なようである．さらにベクトル空間化は，可換モノイドから構成される，可換群とモノイド準同型の組である Grothendieck 群の構成方法との類似が見られるため，ベクトル空間化と Grothendieck 群の構成の関係を調べることは今後の課題である．

本稿で取り扱う具体的な例は，線形代数を学ぶ学生が，ベクトル空間やその公理の理解だけでなく，より一般に，公理とはどういうものであるのか，公理の独立性について，また，２つのものが「等しい」という概念を一般化した，同値関係を理解する上でも，有用なものになると思われる．このような教育的観点から，日本工学教育協会第 69 回年次大会において，本研究の出発点となった素朴な反例と同値関係の原型を発表 (7) した．それに対して本稿では，ベクトル空間化において用いる同値関係を，より整理したものに変更したことなどを含めて，数学に関する内容を詳しく述べる．

2. ベクトル空間の公理系の一部を満たさない集合の例の構成

２つの元 0 と 1 からなる $F_2=\{0,\ 1\}$ を

$$0+1=1+0=1,\ 0+0=1+1=0,\ 0\cdot0=0\cdot1=1\cdot0=0,\ 1\cdot1=1$$

により，和 $+$ と積 $\cdot$ が定義された可換体とする．

また，３つの自然数 $1,2,3$ からなる集合 $N_3=\{1,\ 2,\ 3\}$ に対して，N_3 から N_3 への写像 $\boldsymbol{x}:N_3\to N_3$ を

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&2&3\\ \boldsymbol{x}(1)&\boldsymbol{x}(2)&\boldsymbol{x}(3)\end{pmatrix}$$

のように表すことにして，

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&3\end{pmatrix}$$

とおく．

集合 $V_0=\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ に対して，加法 $+$ と F_2 のスカラー倍 $\cdot$ をそれぞれ

（加法 $+$ ）　$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})(i)=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}(i))\quad(i=1,\ 2,\ 3)$

（F_2 のスカラー倍）　$0\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x},\qquad 1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$

のように定義する．加法 $+$ は写像の合成を用いて定義している．そして F_2 のスカラー倍における 0 倍を上のように定義するのは，前述のベクトル空間の公理の (vii) を満たすために必要だからである．また，F_2 のスカラー倍における 1 倍の定義から，ベクトル空間の公理の (viii) が成り立つ．

命題　集合 V_0 にはベクトル空間の公理の，(ii) と (iii) の２つの条件を除く，６つの条件を満たすような構造を入れることができる．さらに，集合 V_0 の部分集合 $U_0 = \{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\}$ にはベクトル空間の公理の，(iii) を除く，７つの条件を満たすような構造が入る．

証明

集合 V_0 において，次の (1)〜(6) が成り立つ：

(1) V_0 は加法 $+$ について閉じている．実際，

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}, \quad &&\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}, \quad &&\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a} \\ &\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}, &&\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}, &&\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a} \\ &\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}, &&\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}, &&\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c} \end{aligned}$$

である．さらに交換法則（ベクトル空間の公理の (iv)）も成り立つことがわかる．

(2) V_0 の加法の結合法則（ベクトル空間の公理の (i)）が成り立つ．
加法が写像の合成により定義されていることに注意するとよい．実際，

$$\begin{aligned} &((\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z})(i) = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})(\boldsymbol{z}(i)) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{z}(i))) \\ &(\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}))(i) = \boldsymbol{x}((\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})(i)) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{z}(i))) \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \end{aligned}$$

である．

(3) V_0 には加法に関する零元が存在しない．
(1) での V_0 の加法 $+$ の結果から，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ のどれに加えても $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ を変えない元は存在しないことがわかる．

(4) V_0 には加法に関する逆元が存在しない．
加法に関する零元が存在しなければ，逆元は定義できない．

(5) スカラー倍の分配法則（ベクトル空間の公理の (v)）が成り立つ．
スカラー倍の定義と，(1) と (2) で確かめた V_0 の加法に関する交換法則と結合法則を用いて，

$$\begin{aligned} 0\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \\ &= \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}) = 0\cdot\boldsymbol{x}+0\cdot\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

$$1 \cdot (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = 1 \cdot \boldsymbol{x} + 1 \cdot \boldsymbol{y}$$

がわかる．

(6) スカラー倍の積に伴う結合法則（ベクトル空間の公理の (vi)）とスカラー倍の和に伴う分配法則（ベクトル空間の公理の (vii)）が成り立つ．

(1) より，V_0 では　$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$　が成り立つので，

$$0 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} = 1 \cdot \boldsymbol{x}$$

すなわち，V_0 ではスカラー倍により元は変わらないため，スカラー倍の積に伴う結合法則とスカラー倍の和に伴う分配法則が成り立つ．

以上から，集合 V_0 に，ベクトル空間の公理の，(ii) と (iii) の２つの条件を除く，６つの条件を満たすような構造を入れることができる．

さらに，集合 V_0 の部分集合 $U_0 = \{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\}$ に対して，V_0 から誘導される，加法 $+$ とスカラー倍 $\cdot$ を入れる．

このとき，(1) で求めた加法の結果から，U_0 は加法 $+$ について閉じていること，さらに，交換法則も成り立つこと，がわかる．(2)，(5)，(6) は加法 $+$ について閉じている部分集合 U_0 でも成り立つ．

(3) については，(1) の結果を U_0 に制限すると，$\boldsymbol{b}$ が零元の条件を満たすことがわかる．しかし，$\boldsymbol{a}$ の逆元は存在しない．したがって，U_0 はベクトル空間の公理の，(iii) を除く，７つの条件を満たすような構造を持つ例となる．

3. ベクトル空間の公理系の一部を満たさない集合のベクトル空間化

セクション 2 にでは，ベクトル空間の公理の条件の一部を満たさない集合の例を構成した．そこで，セクション 3 では，そのような任意の集合に対して，ある同値関係を導入することにより，商集合がベクトル空間になることを示す．

集合 V は，加法 $+$ と，可換体 F（ここでは F_2 に限らない）のスカラー倍の作用 $\cdot$ をもち，ベクトル空間の公理の，(ii) と (iii) の２つの条件を除く，６つの条件を満たすような集合とする．

ここで，V の元に対して，次のような二項関係 $\sim$ を定義する．

定義　$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \in V$ に対して

$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b} \iff V$ の元 $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{d}$ で　$\boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{d}$　を満たすものが存在する．

補題 1　$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \in V$ に対して $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{c}$ を満たす V の元 $\boldsymbol{c}$ が存在するならば，

$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b}$ である．

証明

任意の $\boldsymbol{a} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{a} = 1 \cdot \boldsymbol{a} = (1+0) \cdot \boldsymbol{a} = 1 \cdot \boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{a}$$

と表せるので，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{c}$ を満たす V の元 $\boldsymbol{c}$ が存在するならば，

$$\boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{c}$$

が成り立つ．ゆえに $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b}$ である．

補題 2　V における二項関係 $\sim$ は同値関係である．

証明

二項関係 $\sim$ が (1) 反射律，(2) 対称律，(3) 推移律を満たすことを確かめる．

(1) 反射律について

任意の $\boldsymbol{a} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{a} = (1+0) \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{a}$$

が成り立つので，補題 1 により，$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{a}$ である．

(2) 対称律について

$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b}$ ならば，$\boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{d}$ を満たす $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{d}$ が存在する．
よって $\boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{c}$ が成り立ち，$\boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{a}$ である．

(3) 推移律について

$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{c}$ とすると，

$$\boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{e} \ \cdots \ ①, \quad \boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{f} = \boldsymbol{c} + 0 \cdot \boldsymbol{g} \ \cdots \ ②$$

を満たす $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ が存在する．①と②の左辺同士と右辺同士を加えると

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{d} + 0 \cdot \boldsymbol{f} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + 0 \cdot \boldsymbol{e} + 0 \cdot \boldsymbol{g}$$

となる．さらに両辺に $(-1) \cdot \boldsymbol{b}$ を加えて

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + (-1) \cdot \boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{d} + 0 \cdot \boldsymbol{f} &= \boldsymbol{b} + (-1) \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + 0 \cdot \boldsymbol{e} + 0 \cdot \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{a} + \{1 + (-1)\} \cdot \boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{d} + 0 \cdot \boldsymbol{f} &= \{1 + (-1)\} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + 0 \cdot \boldsymbol{e} + 0 \cdot \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{a} + 0 \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{f}) &= \boldsymbol{c} + 0 \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{e} + \boldsymbol{g}) \end{aligned}$$

となる．したがって $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{c}$ である．

注意　V においては零ベクトルや逆ベクトルの存在が保証されていないため，いわゆる“移項”の操作ができない．よって補題 2 の (iii) のような議論が必要となる．

補題 3　同値関係 $\sim$ による商集合 $V/\sim$ の元を $[\boldsymbol{a}] = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{a}\}$ とする．
$V/\sim$ には，次のように加法とスカラー倍が定義できる：

$$[\boldsymbol{a}] + [\boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}], \qquad \lambda \cdot [\boldsymbol{a}] = [\lambda \cdot \boldsymbol{a}] \quad (\lambda \in F)$$

証明

同値関係 $\sim$ による商集合 $V/\sim$ の元を $[\boldsymbol{a}] = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{a}\}$ とする．
$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{a}'$，$\boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{b}'$ とすると，

$$\boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}' + 0 \cdot \boldsymbol{e} \ \cdots \ ①, \quad \boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{f} = \boldsymbol{b}' + 0 \cdot \boldsymbol{g} \ \cdots \ ②$$

を満たす $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ が存在する．①と②の左辺同士と右辺同士を加えると，

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + 0 \cdot (\boldsymbol{d} + \boldsymbol{f}) = (\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}') + 0 \cdot (\boldsymbol{e} + \boldsymbol{g})$$

となる．よって $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}'$ であり，同値類の選び方によらずに加法が定義できる．
スカラー倍については，①の両辺に λ を掛けて，

$$\lambda \cdot \boldsymbol{a} + \lambda \cdot 0 \cdot \boldsymbol{d} = \lambda \cdot \boldsymbol{a}' + \lambda \cdot 0 \cdot \boldsymbol{e}$$
$$\lambda \cdot \boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{d} = \lambda \cdot \boldsymbol{a}' + 0 \cdot \boldsymbol{e}$$

となる．よって $\lambda \cdot \boldsymbol{a} \sim \lambda \cdot \boldsymbol{a}'$ であり，スカラー倍も同値類の選び方によらずに定義できる．

補題 4　任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して，$[0 \cdot \boldsymbol{a}] = [0 \cdot \boldsymbol{b}]$ である．

証明

$$0 \cdot \boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{b} = 0 \cdot \boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{a} \quad \text{（右辺は左辺の項の順序を変えただけである）}$$

であるから，$0 \cdot \boldsymbol{a} \sim 0 \cdot \boldsymbol{b}$ である．

補題 5　$V/\sim$ の加法の零元は $0 \cdot [\boldsymbol{v}] = [0 \cdot \boldsymbol{v}]$ である．

証明

任意の V の元 $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{v}$ に対して

$$\boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{v}$$

が成り立つ．すなわち，$\boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{a}$ に $0 \cdot \boldsymbol{v}$ を加えたものに等しいので，補題 1 から，$\boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{a}$ である．よって $[\boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{a}] + [0 \cdot \boldsymbol{v}]$ であり，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して，$[0 \cdot \boldsymbol{v}]$ は $V/\sim$ の加法の零元の性質を持つ．

逆に，$[\boldsymbol{x}]$ を $V/\sim$ の加法の零元の性質を持つような元とする．

このとき，補題 3 を用いて，任意の $[\boldsymbol{v}] \in V/\sim$ に対して $[\boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{v}] + [\boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{v} + \boldsymbol{x}]$ が成り立つ．よって，

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{x} + 0 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{v} + 0 \cdot \boldsymbol{b}$$

を満たす V の元 $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が存在する．この両辺に $(-1) \cdot \boldsymbol{v}$ を加えると

$$\begin{aligned} \{1 + (-1)\} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{x} + 0 \cdot \boldsymbol{a} &= \{1 + (-1)\} \cdot \boldsymbol{v} + 0 \cdot \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} + 0 \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}) &= 0 \cdot \boldsymbol{v} + 0 \cdot \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

となるので，$\boldsymbol{x} \sim 0 \cdot \boldsymbol{v}$ である．

以上から $V/\sim$ は加法の零元を持ち，それは $[0 \cdot \boldsymbol{v}] (= 0 \cdot [\boldsymbol{v}])$ である．

補題 6　$V/\sim$ における $[\boldsymbol{v}]$ の逆元は $(-1) \cdot [\boldsymbol{v}]$ である．

証明

補題 3 により，

$$[\boldsymbol{v}] + (-1) \cdot [\boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{v} + (-1) \cdot \boldsymbol{v}] = [\{1 + (-1)\} \cdot \boldsymbol{v}] = [0 \cdot \boldsymbol{v}]$$

となる．

補題 5 から $[0 \cdot \boldsymbol{v}]$ は $V/\sim$ の加法の零元であるから，$(-1) \cdot [\boldsymbol{v}]$ は $[\boldsymbol{v}]$ の逆元となる．

以上の補題により，次の定理が示せる．

定理　$V/\sim$ はベクトル空間の公理を満たす．

証明

集合 V は，加法 $+$ と，可換体 F のスカラー倍の作用 $\cdot$ をもち，ベクトル空間の公理の (ii) と (iii) の条件を除く 6 つの条件を満たすような集合である．補題 3 により，V における加法 $+$ と，可換体 F のスカラー倍の作用 $\cdot$ の性質は $V/\sim$ へ受け継がれる．さらに，補題 5 により，$V/\sim$ の零元の存在を示すことができ，補題 6 により，$V/\sim$ の各元の逆元の存在も示せる．

ゆえに $V/\sim$ はベクトル空間の公理の条件 (i)-(viii) を満たし，ベクトル空間となる．

さらに同値関係について，次の性質がわかる．

定理

(1) 集合 V がベクトル空間のときは，$V/\sim$ は V と線形同型である．

(2) $V/\sim$ において，一般に $[0 \cdot \boldsymbol{a}] \supsetneqq \{0 \cdot \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in V\}$ である．

証明

(1) V から $V/\sim$ への自然な射影がベクトル空間の同型写像を与えることを示す．

V から $V/\sim$ への自然な射影を p とする．

$$\begin{array}{cccc} p: & V & \longrightarrow & V/\sim \\ & \cup & & \cup \\ & \boldsymbol{v} & \longmapsto & [\boldsymbol{v}] \end{array}$$

p は次の①，②，③を満たす．

① 補題 3 から，線形写像である．

② p の定義から，全射である．

③ 補題 5 から，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(p)$ ならば，$p(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}] = [0 \cdot \boldsymbol{v}]$ である．

よって，$\boldsymbol{x} + 0 \cdot \boldsymbol{a} = 0 \cdot \boldsymbol{v} + 0 \cdot \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in V$ が存在する．

ここで V はベクトル空間であり，零ベクトル $\boldsymbol{0}$ を持ち，

$$0 \cdot \boldsymbol{v} = 0 \cdot \boldsymbol{a} = 0 \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

である．したがって $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ がわかり，単射である．

ゆえに p は V から $V/\sim$ へのベクトル空間の同型写像である．

(2) 補題 4 により，$[0 \cdot \boldsymbol{a}] \supset \{0 \cdot \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in V\}$ がわかる．

$[0 \cdot \boldsymbol{a}] \supsetneqq \{0 \cdot \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in V\}$ である例については，次のセクションで述べる．

4. ベクトル空間の公理系の一部を満たさない集合のベクトル空間化の例

セクション 3 での結果を，まず，セクション 2 で構成した，ベクトル空間の公理系の一部を満たさない集合に対して適用する．

例 1　集合 V_0 は，N_3 から N_3 への写像の元

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

からなり，加法 + の結果は次のようになる．

$+$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}$
$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$
$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{c}$

V_0 には，可換体 $F_2 = \{0,\ 1\}$ によるスカラー倍を考える．上の加法の表から，V_0 の任意の元 $\boldsymbol{x}$ に対して

$$0 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \quad [\boldsymbol{x}] = [0 \cdot \boldsymbol{x}]$$

が成り立つため，セクション 3 の補題 5 から，$V_0/\sim$ は零ベクトル空間になる．

同様にして，V_0 の部分集合 $U_0 = \{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\}$ の，同値関係 $\sim$ による商集合 $U_0/\sim$ は零ベクトル空間になる．

次に，ベクトル空間化により，零ベクトル空間にはならない例を構成する．

<u>例 2</u>　集合 $N_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ に対して，N_4 から N_4 への写像の元からなる集合 $W_0 = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$ を考える．ただし，

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

とする．

W_0 における加法 $+$ と，可換体 F_2 のスカラー倍 $\cdot$ は，V_0 の場合と同様に定義する．

W_0 の加法 $+$ の表は次のようになる．

$+$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$
$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$
$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$
$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{c}$

この表から，W_0 には零元 $\boldsymbol{c}$ が存在するが，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ には逆元が存在しないことがわかる．

$W_0/\sim$ については，

$$0 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}, \qquad 0 \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a},$$
$$0 \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}, \qquad 0 \cdot \boldsymbol{d} = \boldsymbol{d} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{c}$$

となることに注意して，

$$\boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}\ \ (\boldsymbol{x} \in W_0), \quad \boldsymbol{c} + 0 \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}\ \ (\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \quad \boldsymbol{c} + 0 \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}\ \ (\boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$$

がわかる．よって $[\boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{c}] = [0 \cdot \boldsymbol{v}]$ $(\boldsymbol{v} \in W_0)$ が成り立ち，これが $W_0/\sim$ の零元である．

したがって零元でない元は $[\boldsymbol{b}]$ と $[\boldsymbol{d}]$ である．加法の表から，

$$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{d} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{d} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{d}$$

がわかる．$\boldsymbol{a} = 0 \cdot \boldsymbol{a}$ であるから，

$$\boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{d} + 0 \cdot \boldsymbol{a}$$

が成り立ち，$[\boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{d}]$ である．

ゆえに $W_0/\sim = \{[\boldsymbol{a}], [\boldsymbol{b}]\}$ となる．

ここまでに挙げたベクトル空間化の例 $V_0/\sim$，$U_0/\sim$，$W_0/\sim$ では $[0 \cdot \boldsymbol{a}] = \{0 \cdot \boldsymbol{v}\}$ となっている．そこで，$[0 \cdot \boldsymbol{a}] \supsetneqq \{0 \cdot \boldsymbol{v}\}$ となる例を構成する．

<u>例 3</u>　集合 V_1 は，N_3 から N_3 への写像の元

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

からなるものとする．加法 $+$ の結果は次のようになる．

$+$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}$
$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{b}$

そして，V_1 には，可換体 $F_2 = \{0,\ 1\}$ によるスカラー倍を考える．

V_1 では，任意の $\boldsymbol{x}$ に対して，

$$\boldsymbol{x} = 1 \cdot \boldsymbol{x} = (1+0) \cdot \boldsymbol{x} = (0+1) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}$$

が成り立つ．

V_1 では，$\boldsymbol{b}$ が零ベクトルの性質を満たすが，$\boldsymbol{a}$ には逆ベクトルが存在しない．

そして，商集合 $V_1/\sim$ を考えると，これは零ベクトル空間になる．実際，

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} = 0 \cdot \boldsymbol{a}$$
$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} = 0 \cdot \boldsymbol{b}$$

であるから，$[\boldsymbol{a}] = [0 \cdot \boldsymbol{a}]$，$[\boldsymbol{b}] = [0 \cdot \boldsymbol{b}]$ であり，

$$\boldsymbol{c} + 0 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$$

であるから，$\boldsymbol{c} \sim \boldsymbol{a}$，よって $[\boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{a}] = [0 \cdot \boldsymbol{a}]$ である．

しかし，$\boldsymbol{c} = 0 \cdot \boldsymbol{v}$ を満たすような V_1 の元 $\boldsymbol{v}$ は存在しない．

この例により，一般に $[0 \cdot \boldsymbol{a}] \supsetneqq \{0 \cdot \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in V\}$ であることがわかる．

5. 最後に

本稿で扱ったベクトル空間化の考え方は，可換モノイドから構成される可換群とモノイド準同型の組である，Grothendieck 群の構成と構図的に類似していると思われる．ベクトル空間化と Grothendieck 群の構成の関係を調べることは今後の課題である．

参考文献

(1) 日本数学会編集，「岩波数学辞典 第４版」，岩波書店，(2007).

(2) 太田浩一,「ナブラのための協奏曲」，共立出版，(2015).

(3) 斎藤正彦,「線形代数入門」，東京大学出版会，(1966).

(4) 佐武一郎,「線形代数学」，裳華房，(1974).

(5) 松坂和夫,「線型代数入門」，岩波書店，(1980).

(6) 笠原晧司,「線形代数と固有値問題」，現代数学社，(2004).

(7) 島田伸一，小林俊公,「ベクトル空間の公理系の一部を欠く空間の例と，その同値関係によるベクトル空間化」，2021 年度工学教育研究講演会講演論文集，pp.222-223, 日本工学教育協会，(2021).