摂南大学融合科学研究所論文集，第 8 巻　第 1 号，(2022)　　研究論文

2 次元固有空間をもつ線分上のラプラシアンのスペクトルの性質と正の固有値の逆数和[1]

Spectral properties of Laplacian on line segment with two dimensional eigenspace and reciprocal sum of positive eigenvalues

小林俊公　摂南大学理工学部 基礎理工学機構
島田伸一 [2]　摂南大学理工学部 基礎理工学機構

KOBAYASHI, Toshimasa　**Institute for Fundamental Sciences, Faculty of Science and Engineering, Setsunan University**

SHIMADA, Shinichi　**Institute for Fundamental Sciences, Faculty of Science and Engineering, Setsunan University**

Abstract

This is a continuation of our previous paper, in which we determined all possible selfadjoint extensions of $-(\frac{d}{dx})^2$, whose domain is $C^\infty-$functions with compact support on open interval $(0,1)$. In this paper, given an arbitrary real number, we investigate which extension has an eigenspace of dimension 2, and compute the reciprocal sum of the positive eigenvalues of those operators. They give new infinite sum formulas and alternative proofs of well-known ones.

キーワード：自己共役拡張，境界条件，トレースの公式，固有値，固有空間

Keywords：selfadjoint extension, boundary condition, trace formula, eigenvalue, eigenspace

1．序

線分上のラプラシアン H とは，開区間 $I=(0,1)$ 上の 2 階線型微分作用素 $-\left(\frac{d}{dx}\right)^2$ の

[1]【原稿受付】2022 年 9 月 10 日，【掲載決定】2022 年 12 月 12 日

[2]【主著者連絡先】島田　伸一　　摂南大学，教授　e-mail：shimada@mpg.setsunan.ac.jp
〒572-8508　大阪府寝屋川市池田中町 17-8，摂南大学理工学部 基礎理工学機構

全ての自己共役拡張を意味する．正確には, まず内積を

$$(u,v) := \int_0^1 u(x)\overline{v(x)}dx$$

とした, I 上の複素数値ルベーグ 2 乗可積分関数全体のヒルベルト空間 $\mathcal{H} := L_2(I)$ をとる．その空間内で I 上の複素数値無限回微分可能で, コンパクトサポートを持つ関数全体のベクトル空間 $C_0^\infty(I)$ を定義域とする $\mathcal{H}$ 上の最小作用素 H_{00}:

$$\mathrm{Dom}(H_{00}) := C_0^\infty(I), \quad H_{00}u(x) := -u''(x)$$

の自己共役拡張を H とする．自己共役拡張全体と 2×2 ユニタリ行列全体 $U(2)$ の間には全単射が存在する．$H = H(U)$ はユニタリ行列 $U \in U(2)$ によって次のように特徴付けされる [1]．

(i) $H(U)$ の定義域の元 $v(x)$ は, I 上の 2 階のソボレフ空間 [3],[4] $W_2(I)$ の元で, $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(2)$ に対して, 境界条件

$$\overline{A}\begin{pmatrix} v'(1) \\ v'(0) \end{pmatrix} = \pi(1+i)\overline{B}\begin{pmatrix} v(1) \\ v(0) \end{pmatrix}$$

を満たすものである．ここで

$$A = \begin{pmatrix} -e^\pi + ae^\pi + c & -1 + a + ce^\pi \\ -1 + be^\pi + d & -e^\pi + b + de^\pi \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -ie^\pi + ae^\pi - c & -i + a - ce^\pi \\ i + be^\pi - d & ie^\pi + b - de^\pi \end{pmatrix}$$

である．また境界値はトレースの意味 [2],[4] である．

(ii) $H(U)$ の作用は,

$$H(U)v(x) = -v''(x)$$

である．微分はシュワルツ超関数の意味 [2],[4] でとる．なお上の境界条件は, 部分積分をして境界での値が消えるようになっている．すなわち

$$(H(U)v, w) - (v, H(U)w) = 0$$

が成り立つ．しかしこれは対称 (エルミート) 作用素となる為の条件であって, 自己共役となるにはさらに条件が必要であることを注意しておく．自己共役拡張については, 既に一般論が完成しており, 前論文ではそれを作用素 H_{00} に適用した．自己共役にこだわるのは, 自己共役作用素ならば, 固有関数からなる正規直交基底の存在が保証されるからである．

対称作用素では保証されない．物理の本の中には，対称作用素・極大対称作用素・自己共役作用素の区別がついていないものも多い．同じ数式を書いているが，数学とは別物と認識しないと混乱が起こる．

さて，ディリクレ・ノイマン境界条件に対応するユニタリ行列は，それぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

であることは前論文で与えた．同様に前論文で α を実数とするとき，ユニタリ行列

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{(1-e^{2\pi})+\alpha\pi(e^{2\pi}+1)-i\alpha\pi(e^{2\pi}+1)} \\ &\times \begin{pmatrix} (1-e^{2\pi})+\alpha\pi(e^{2\pi}+1)+i\alpha\pi(e^{2\pi}-1) & -2i\alpha\pi e^{\pi} \\ -2i\alpha\pi e^{\pi} & (1-e^{2\pi})+\alpha\pi(e^{2\pi}+1)-i\alpha\pi(e^{2\pi}-1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

に対応する自己共役拡張 $H(U_0)$ の境界条件は

$$v(0)=0,\ \alpha v'(1)=v(1)$$

であることを示した [1]．自己共役拡張の境界条件には，一般には超越方程式が対応する．$H(U_0)$ の境界条件に対応する超越方程式は，

$$\alpha x = \tan x$$

である．この方程式のゼロ点の逆 2 乗和は正の固有値の逆数和となる．この逆数和はトレースの公式及びその一般化した方法から得られる．このように種々の自己共役拡張の境界条件を定めることは，種々の無限和の公式を作ることに繋がっていく．本論文では，任意の実数 λ を与えたとき，λ が固有値となり，その対応する固有空間の次元が 2 となる自己共役拡張 $H(U)$ が存在するかどうかを問題にしたい．次元 2 としたのは，全ての自己共役拡張は 2 階の微分作用素なので，固有空間の次元は高々 2 であり，極大となる状況では $H(U)$ は一意的に定まると期待できるからである．実際に正しいことを示す．しかし逆は成り立たない．定理 3-1 によれば，固有値 $(2n\pi)^2\ (n=1,2,\cdots)$ が全て 2 次元の固有空間をもつ $H(U_2)$，固有値 $\{(2n-1)\pi\}^2\ (n=1,2,\cdots)$ が全て 2 次元の固有空間をもつ $H(U_3)$ という自己共役拡張が存在する．しかし，$H(U_2), H(U_3)$ を除けば，どんな自己共役拡張も 2 次元固有空間を持つ固有値は高々 1 つしか持たないことが分かる．また今回特

定した作用素 $H(U)$ から得られる無限和の公式から, いわゆるバーゼル問題：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

の別証明や, $H(U_0)$ から得られた無限和の公式の別証明も与えることが出来る．また新しい無限和の公式として,

$$x\tan x=a\tan a\ (0<a<\frac{\pi}{2})$$

の正のゼロ点の逆 2 乗和も得られる．一般の $H(U)$ に対しては, 経験から分かるように, 固有空間の次元はほとんど 1 になる．2 次元固有空間をもつ自己共役拡張は特殊なものである．そのような作用素を扱ったのは, 境界条件は一体どのようなものになるのかという興味と, ユニタリ行列 U がほぼ決まるだろうという期待からである．一般の $H(U)$ を扱うには, まずユニタリ行列をどのように分類して扱うかという問題が生ずる．どのような無限和が得られるかは, ユニタリ行列 U が固有値 $1, i$ を持つかどうかで扱いが変わることが分かってきた．それは次の論文で報告したい.

なお本研究は,「超越方程式の正の根の逆数の 2 乗和を計算したい」を出発点とし, その為に線分上のラプラシアンの自己共役拡張の境界条件, 固有値, 固有関数を調べ, その性質を利用している．一方, 熱核の問題でも 1 次元ラプラシアンの境界条件をどのように扱うかが問題になることもあるという．また高次元空間での境界条件をもつラプラシアンの固有関数が画像データ解析に応用されることもあるという [6]．このようにラプラシアンの境界条件, 固有関数を調べることは, 純粋数学的な問題だけではなく工学分野にも広い応用を持つので, 我々のラプラシアンの扱い方に工学系の方々も興味を持って頂けることを願っている．工学分野への応用の言及, 文献を御教示くださった査読者に感謝する.

2．ゼロ固有空間の次元が 2 となる $H(U)$

$-v''(x)=0$ の解は, A, B を定数として $v(x)=A+Bx$ の形であるから, ゼロ固有空間の次元は高々 2 である．次元が丁度 2 となる場合が唯 1 つあることを示そう．まず境界条件を計算しやすい形に書き直しておく.

2-1 補題

$U\in U(2)$ に対して, $W_2(I)$ の元 $v(x)$ が $H(U)$ の定義域に入る為の必要十分条件は, 次

の方程式を満たすことである.

$$(U-1)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v'(1) \\ v'(0) \end{pmatrix} = \pi(1-i)(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v(1) \\ v(0) \end{pmatrix}$$

ここで 2×2 単位行列を 1 と表した.

2-2 証明

序で述べたように, $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(2)$ に対して,

$$A = \begin{pmatrix} -e^{\pi} + ae^{\pi} + c & -1 + a + ce^{\pi} \\ -1 + be^{\pi} + d & -e^{\pi} + b + de^{\pi} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-1 & c \\ b & d-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix} = (U^T - 1)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -ie^{\pi} + ae^{\pi} - c & -i + a - ce^{\pi} \\ i + be^{\pi} - d & ie^{\pi} + b - de^{\pi} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-i & c \\ b & d-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix} = (U^T - i)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}$$

であるから,

$$\overline{A}\begin{pmatrix} v'(1) \\ v'(0) \end{pmatrix} = \pi(1+i)\overline{B}\begin{pmatrix} v(1) \\ v(0) \end{pmatrix}$$

は,

$$(U^* - 1)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v'(1) \\ v'(0) \end{pmatrix} = \pi(1+i)(U^* + i)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v(1) \\ v(0) \end{pmatrix}$$

を意味する. 両辺に左から U を掛ける. U がユニタリ行列であるから $U^*U = 1$ より

$$U(U^* - 1) = 1 - U = -(U-1),$$

$$(1+i)U(U^* + i) = (1+i)(1+iU) = (i-1)(-i+U) = -(1-i)(U-i)$$

である. よって

$$-(U-1)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v'(1) \\ v'(0) \end{pmatrix} = -\pi(1-i)(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v(1) \\ v(0) \end{pmatrix}$$

となり, 求める方程式が得られた. □

2-3 定理

$H(U)$ が次元 2 のゼロ固有空間を持つのは,

$$U = U_1 = \frac{1}{a-ib}\begin{pmatrix} b & -ia \\ -ia & b \end{pmatrix}, \quad a = e^{\pi}+1, \quad b = e^{\pi}+1-\pi(e^{\pi}-1)$$

であるときに限る. このとき境界条件は,

$$v'(1) = v(1) - v(0), \quad v'(0) = v(1) - v(0)$$

であり, ゼロ固有空間は, 固有関数 $1, x$ で張られる.

2-4 証明

これから固有関数を求める為に, 超関数としての微分方程式を解く. しかし楕円型微分方程式の解の正則性から, 固有関数は通常の意味で無限回微分可能となるので, 初めから通常の微分方程式として扱って良い. そしてトレースも普通の境界値と一致する [(2),(4)].

まず $H(U)$ のゼロ固有空間の次元が 2 であるとする. $H(U)v = -v'' = 0$ の 2 つの 1 次独立な解

$$v_j(x) = A_j + B_j x \quad (j = 1, 2)$$

がある. このとき $\det\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix} \neq 0$ である. そうでないとすると

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす定数 α, β が存在する. このとき

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha(A_1 + B_1 x) + \beta(A_2 + B_2 x) = (A_1\alpha + A_2\beta) + (B_1\alpha + B_2\beta)x = 0$$

となり, v_1, v_2 が 1 次独立であることに矛盾する. よって

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

が得られるから, $1, x$ が固有関数になることが分かった.

そこで補題 2-1 より $v_1(x)=1, v_2(x)=x$ は, 境界条件

$$(U-1)\begin{pmatrix} e^\pi & 1 \\ 1 & e^\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1'(1) & v_2'(1) \\ v_1'(0) & v_2'(0) \end{pmatrix} = \pi(1-i)(U-i)\begin{pmatrix} e^\pi & 1 \\ -1 & -e^\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1(1) & v_2(1) \\ v_1(0) & v_2(0) \end{pmatrix}$$

を満たす. これを解いて U を求める.

$$(U-1)\begin{pmatrix} e^\pi & 1 \\ 1 & e^\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \pi(1-i)(U-i)\begin{pmatrix} e^\pi & 1 \\ -1 & -e^\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(U-1)\begin{pmatrix} 0 & e^\pi+1 \\ 0 & e^\pi+1 \end{pmatrix} = \pi(1-i)(U-i)\begin{pmatrix} e^\pi+1 & e^\pi \\ -1-e^\pi & -1 \end{pmatrix},$$

$$U\left\{\begin{pmatrix} 0 & e^\pi+1 \\ 0 & e^\pi+1 \end{pmatrix} - \pi(1-i)\begin{pmatrix} e^\pi+1 & e^\pi \\ -1-e^\pi & -1 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 0 & e^\pi+1 \\ 0 & e^\pi+1 \end{pmatrix} - \pi(1-i)i\begin{pmatrix} e^\pi+1 & e^\pi \\ -1-e^\pi & -1 \end{pmatrix},$$

$$U\begin{pmatrix} -\pi(1-i)(e^\pi+1) & e^\pi+1-\pi(1-i)e^\pi \\ \pi(1-i)(e^\pi+1) & e^\pi+1+\pi(1-i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi(1+i)(e^\pi+1) & e^\pi+1-\pi(1+i)e^\pi \\ \pi(1+i)(e^\pi+1) & e^\pi+1+\pi(1+i) \end{pmatrix}$$

となる. これを $UV=W$ と書くと,

$$\det V = -\pi(1-i)(e^\pi+1)\{e^\pi+1+\pi(1-i)\} - \{e^\pi+1-\pi(1-i)e^\pi\}\pi(1-i)(e^\pi+1)$$

$$= -\pi(e^\pi+1)\{2(1-i)(e^\pi+1)-(1-i)^2\pi(e^\pi-1)\} = -\pi(e^\pi+1)\{2(1-i)(e^\pi+1)+2i\pi(e^\pi-1)\}$$

$$= -2\pi(e^\pi+1)[(e^\pi+1)-i\{(e^\pi-1)-\pi(e^\pi-1)\}] = -2\pi(e^\pi+1)(a-ib)$$

であるから, V は正則と分かり, $U=WV^{-1}$ と U は唯 1 つに定まる.

$$(\det V)WV^{-1} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\pi(1+i)(e^\pi+1) & e^\pi+1-\pi(1+i)e^\pi \\ \pi(1+i)(e^\pi+1) & e^\pi+1+\pi(1+i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^\pi+1+\pi(1-i) & -(e^\pi+1)+\pi(1-i)e^\pi \\ -\pi(1-i)(e^\pi+1) & -\pi(1-i)(e^\pi+1) \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$p = -\pi(1+i)(e^\pi+1)\{e^\pi+1+\pi(1-i)\} - \{e^\pi+1-\pi(1+i)e^\pi\}\pi(1-i)(e^\pi+1)$$

$$= -\pi(e^\pi+1)\{(1+i)(e^\pi+1)+2\pi+(1-i)(e^\pi+1)-2\pi e^\pi\}$$

$$= -\pi(e^\pi+1)\{2(e^\pi+1)-2\pi(e^\pi-1)\} = -2\pi(e^\pi+1)\cdot b,$$

$$q = -\pi(1+i)(e^\pi+1)\{-(e^\pi+1)+\pi(1-i)e^\pi\} - \{e^\pi+1-\pi(1+i)e^\pi\}\pi(1-i)(e^\pi+1)$$

$$= -\pi(e^\pi+1)\{-(1+i)(e^\pi+1)+2\pi e^\pi+(1-i)(e^\pi+1)-2\pi e^\pi\}$$

$$= -\pi(e^\pi+1)\{-2i(e^\pi+1)\} = -2\pi(e^\pi+1)\cdot(-ia),$$

$$r = \pi(1+i)(e^\pi+1)\{e^\pi+1+\pi(1-i)\} - \{e^\pi+1+\pi(1+i)\}\pi(1-i)(e^\pi+1)$$
$$= \pi(e^\pi+1)\{(1+i)(e^\pi+1)+2\pi-(1-i)(e^\pi+1)-2\pi\}$$
$$= \pi(e^\pi+1)\{2i(e^\pi+1)\} = -2\pi(e^\pi+1)\cdot\{-i(e^\pi+1)\} = -2\pi(e^\pi+1)\cdot(-ia),$$
$$s = \pi(1+i)(e^\pi+1)\{-(e^\pi+1)+\pi(1-i)e^\pi\} - \{e^\pi+1+\pi(1+i)\}\pi(1-i)(e^\pi+1)$$
$$= \pi(1+i)(e^\pi+1)\{-(e^\pi+1)+\pi(1-i)e^\pi\} - \{e^\pi+1+\pi(1+i)\}\pi(1-i)(e^\pi+1)$$
$$= \pi(e^\pi+1)\{-(1+i)(e^\pi+1)+2\pi e^\pi-(1-i)(e^\pi+1)-2\pi\}$$
$$= \pi(e^\pi+1)\{-2(e^\pi+1)+2\pi(e^\pi-1)\} = -2\pi(e^\pi+1)\{(e^\pi+1)-\pi(e^\pi-1)\}$$
$$= -2\pi(e^\pi+1)\cdot b$$

である．これより

$$U = (\det V)^{-1}\cdot(\det V)WV^{-1}$$
$$= \{-2\pi(e^\pi+1)\cdot(a-ib)\}^{-1}\cdot\{-2\pi(e^\pi+1)\}\cdot\begin{pmatrix} b & -ia \\ -ia & b\end{pmatrix} = \frac{1}{a-ib}\begin{pmatrix} b & -ia \\ -ia & b\end{pmatrix}$$

であることが分かった.

次にこのユニタリ行列 U に対して, $H(U)$ の境界条件

$$(U-1)\begin{pmatrix} e^\pi & 1 \\ 1 & e^\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v'(1) \\ v'(0)\end{pmatrix} = \pi(1-i)(U-i)\begin{pmatrix} e^\pi & 1 \\ -1 & -e^\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v(1) \\ v(0)\end{pmatrix}$$

を計算する．この形から U が固有値 1 または i を持つかどうかで境界条件の表示が変わる．そこで U の固有値をまず求めておく.

$$\det(U-\lambda) = \det\begin{pmatrix} \frac{b}{a-ib}-\lambda & \frac{-ia}{a-ib} \\ \frac{-ia}{a-ib} & \frac{b}{a-ib}-\lambda\end{pmatrix} = \left(\frac{b}{a-ib}-\lambda\right)^2 - \left(\frac{-ia}{a-ib}\right)^2 = 0$$

を解いて,

$$\lambda = \frac{b}{a-ib} \pm (\frac{-ia}{a-ib}) = i, (-i)\cdot\frac{a+ib}{a-ib}$$

である．よって $v'(1), v'(0)$ について解く.

$$U-1 = \frac{1}{a-ib}\begin{pmatrix} b-(a-ib) & -ia \\ -ia & b-(a-ib)\end{pmatrix} = \frac{1}{a-ib}\begin{pmatrix} -a+(1+i)b & -ia \\ -ia & -a+(1+i)b\end{pmatrix},$$
$$U-i = \frac{1}{a-ib}\begin{pmatrix} b-i(a-ib) & -ia \\ -ia & b-i(a-ib)\end{pmatrix} = \frac{-ia}{a-ib}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

であるから, 境界条件は

$$\begin{pmatrix} -a+(1+i)b & -ia \\ -ia & -a+(1+i)b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'(1) \\ v'(0) \end{pmatrix}$$

$$= \pi(1-i)(-ia) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(1) \\ v(0) \end{pmatrix}$$

となる.

$$\det \begin{pmatrix} -a+(1+i)b & -ia \\ -ia & -a+(1+i)b \end{pmatrix} = \{-a+(1+i)b\}^2 - (-ia)^2$$

$$= \{-a+(1+i)b-ia\}\{-a+(1+i)b+ia\} = -(1+i)(a-b)(-1+i)(a+\frac{1+i}{-1+i}b) = 2(a-b)(a-ib),$$

$$\det \begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix} = (e^{\pi}-1)(e^{\pi}+1)$$

より

$$\begin{pmatrix} v'(1) \\ v'(0) \end{pmatrix} = \frac{\pi(1-i)(-ia)}{2(a-b)(a-ib)(e^{\pi}-1)(e^{\pi}+1)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} e^{\pi} & -1 \\ -1 & e^{\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a+(1+i)b & ia \\ ia & -a+(1+i)b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(1) \\ v(0) \end{pmatrix}$$

である. さらに

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\pi}-1 & 1-e^{\pi} \\ e^{\pi}-1 & 1-e^{\pi} \end{pmatrix} = (e^{\pi}-1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -a+(1+i)b & ia \\ ia & -a+(1+i)b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1+i)a+(1+i)b & (1-i)a-(1+i)b \\ (-1+i)a+(1+i)b & (1-i)a-(1+i)b \end{pmatrix}$$

$$= (-1+i) \begin{pmatrix} a-ib & -a+ib \\ a-ib & -a+ib \end{pmatrix} = (-1+i)(a-ib) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} e^{\pi} & -1 \\ -1 & e^{\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\pi}-1 & -(e^{\pi}-1) \\ e^{\pi}-1 & -(e^{\pi}-1) \end{pmatrix} = (e^{\pi}-1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$a-b = e^{\pi}+1-\{e^{\pi}+1-\pi(e^{\pi}-1)\} = \pi(e^{\pi}-1)$$

である. 以上から境界条件は次の形となる.

$$\begin{pmatrix} v'(1) \\ v'(0) \end{pmatrix} = \frac{\pi(1-i)(-i)\cdot(e^{\pi}+1)}{2\cdot\pi(e^{\pi}-1)\cdot(a-ib)(e^{\pi}-1)(e^{\pi}+1)} \times$$

$$\times(e^{\pi}-1)\cdot(-1+i)(a-ib)\cdot(e^{\pi}-1)\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v(1)\\ v(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v(1)\\ v(0)\end{pmatrix}. \quad \square$$

次に $H(U_1)$ の正の固有値を調べる.

2-5 定理 $H(U_1)$ の正の固有値は, $\{(\lambda_n^{(1)})^2, (\lambda_n^{(2)})^2; n = 1,2,3,\cdots\}$ である. ここで $\lambda_n^{(1)} = 2\pi n$, $\lambda_n^{(2)}$ は超越方程式

$$\tan\left(\frac{\lambda}{2}\right)=\frac{\lambda}{2}$$

の正の解で, 小さい方から n 番目のものである. $\pi n < \frac{\lambda_n^{(2)}}{2} < \pi n + \frac{\pi}{2}$ である. 対応する固有関数は, それぞれ $\cos(\lambda_n^{(1)}x)$ と $(\sin\lambda_n^{(2)} - \lambda_n^{(2)})\cos(\lambda_n^{(2)}x) + (1-\cos\lambda_n^{(2))})\sin(\lambda_n^{(2)}x)$ である. すなわち各固有空間の次元は 1 である.

2-6 証明

$\lambda > 0$ とする. $H(U_1)v = \lambda^2 v$ は $-v''(x) = \lambda^2 v(x)$ を意味するから,

$$v(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) \quad (A, B; \text{定数})$$

の形である. 境界条件：$v'(a) = v(1) - v(0)\,(a = 0,1)$ より, A, B についての方程式

$$\begin{pmatrix}\lambda\sin\lambda+\cos\lambda-1 & -\lambda\cos\lambda+\sin\lambda\\ \cos\lambda-1 & \sin\lambda-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

が得られる. $A = B = 0$ 以外の解が存在する λ は,

$$\det\begin{pmatrix}\lambda\sin\lambda+\cos\lambda-1 & -\lambda\cos\lambda+\sin\lambda\\ \cos\lambda-1 & \sin\lambda-\lambda\end{pmatrix}$$

$$=4\lambda\cdot\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)\left\{\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)-\left(\frac{\lambda}{2}\right)\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right\}=0$$

を満たさなければならない. よって $\lambda = \lambda_n^{(a)}\,(n = 1,2,\cdots; a = 1,2)$ である. またこのとき $\sin\lambda - \lambda \neq 0\,(\lambda > 0)$ より,

$$B=\frac{1-\cos\lambda}{\sin\lambda-\lambda}A$$

から

$$(\cos\lambda-1+\lambda\sin\lambda)A+(\sin\lambda-\lambda\cos\lambda)B=0$$

が分かる．よって

$$v(x)=\frac{A}{\sin\lambda-\lambda}\{(\sin\lambda-\lambda)\cos(\lambda x)+(1-\cos\lambda)\sin(\lambda x)\}$$

である．特に $\lambda=2\pi n$ のときは, $v(x)=A\cos(\lambda x)$ となる．　□

2-7 定理 $H(U_1)$ は負の固有値は持たない．

2-8 証明

$\lambda>0$ とする．$H(U_1)v=-\lambda^2 v$ は $-v''(x)=-\lambda^2 v(x)$ を意味するから,

$$v(x)=Ae^{-\lambda x}+Be^{\lambda x}\quad (A,B;\text{定数})$$

の形である．境界条件：$v'(a)=v(1)-v(0)\,(a=0,1)$ より, A,B についての方程式

$$\begin{pmatrix} e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}-1 & e^{\lambda}-\lambda e^{\lambda}-1 \\ e^{-\lambda}+\lambda-1 & e^{\lambda}-\lambda-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が得られる．$A=B=0$ 以外の解が存在する $\lambda>0$ は,

$$f(\lambda):=\det\begin{pmatrix} e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}-1 & e^{\lambda}-\lambda e^{\lambda}-1 \\ e^{-\lambda}+\lambda-1 & e^{\lambda}-\lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$=4\lambda-e^{-\lambda}(\lambda^2+2\lambda+2)+e^{\lambda}(\lambda^2-2\lambda+2)=0$$

を満たす．しかし

$$f(0)=0,\quad f'(\lambda)=4+e^{-\lambda}\cdot\lambda^2+e^{\lambda}\cdot\lambda^2>0$$

であるから, $f(\lambda)=0\,(\exists\lambda>0)$ は起こらない．　□

固有値が分かったので, 正の固有値の逆数和を求める．まず簡単な積分公式を準備する．

2-9 補題 $\alpha>-1, 0<x<1$, $H_x(t)=\begin{cases} 1 & (0<t\leqq x) \\ 0 & (x<t<1) \end{cases}$ とする．このとき $u(t)\in\mathcal{H}$ と $x^{\alpha}\cdot H_x(t)$ との内積を x について積分すると, 等式

$$\int_0^1 dx\,(u(t),x^{\alpha}\cdot H_x(t))=\left(u(t),\frac{1}{\alpha+1}(1-t^{\alpha+1})\right)$$

が成り立つ.

2-10 証明

Fubini の定理より, 積分の順序交換を行う.

$$\int_0^1 dx\,(u(t), x^\alpha \cdot H_x(t)) = \int_0^1 dx \int_0^x dt u(t) x^\alpha = \int_0^1 dt u(t) \int_t^1 dx x^\alpha$$
$$= \int_0^1 dt u(t) \frac{1}{\alpha+1}(1-t^{\alpha+1}) = \left(u(t), \frac{1}{\alpha+1}(1-t^{\alpha+1})\right). \quad \square$$

2-11 補題

$\mathcal{H}$ 上の積分作用素 T を

$$Tu(x) = \int_0^1 k(x,t)u(t)dt, \quad k(x,t) = (t-x)H_x(t) + 2t^2 - t^3 + (-3t^2+2t^3)x$$

で定義する. このとき $(u,1) = (u,x) = 0$ を満たす $u \in \mathcal{H}$ に対して,

$$Tu \in \mathrm{Dom}\,(H(U_1)), \quad H(U_1)Tu = u, \quad (Tu,1) = (Tu,x) = 0$$

が成り立つ.

2-12 証明 $H(U_1)v(x) = -v''(x) = 0$ の基本解系は $x, 1$ なので, $v(x) = A(x) + B(x)x$ の形で $-v''(x) = u(x)$ を定数変化法で解く.

$$v'(x) = A'(x) + B'(x)x + B(x)$$

から,

$$A'(x) + B'(x)x = 0 \tag{1}$$

にとる. このとき $v'(x) = B(x)$ であるから,

$$-u(x) = v''(x) = B'(x) \tag{2}$$

を解いて,

$$B(x) = -\int_0^x u(t)dt + C = -(u, H_x) + C \quad (C; 定数) \tag{3}$$

の形である．(1), (2) から, $A'(x) = xu(x)$ なので

$$A(x) = \int_0^x tu(t)dt + D = (u, t \cdot H_x) + D \quad (D; \text{定数}) \tag{4}$$

の形であることが分かる．これより $v(x)$ は

$$v(x) = (u, t \cdot H_x) + D - (u, H_x)x + Cx = (u, (t-x)H_x) + D + Cx \tag{5}$$

の形である．この表示から, a.e.x に対して, 2 階まで微分できそれらの導関数が $\mathcal{H}$ に属するから, $v(x)$ はソボレフ空間 $W_2(I)$ の元である．後は境界条件を満たすように C, D を決めると, $v(x)$ は $H(U_1)$ の定義域に入る．実際は, (3), (5) と $v'(x) = B(x)$ より

$$v(1) = (u, t-1) + D + C = D + C, \quad v(0) = D,$$
$$v'(1) = -(u, 1) + C = C, \quad v'(0) = C$$

である．ここで $(u, 1) = (u, t) = 0$ であることを用いた．これより

$$v'(1) = v'(0) = C = v(1) - v(0)$$

となり, 定数 C, D が何であっても境界条件は満たされ, $v(x)$ は $H(U_1)$ の定義域に入る．そこで $v(x)$ が $1, x$ と直交するように C, D を決める．$(u, 1) = (u, t) = 0$ と補題 2-9 より, C, D の満たすべき方程式は

$$0 = (v, 1) = \int_0^1 dx \{(u, (t-x)H_x) + D + Cx\}$$

$$= \int_0^1 dx \{(t \cdot u, H_x) - (u, x \cdot H_x) + D + Cx\}$$

$$= (t \cdot u, 1-t) - (u, \frac{1}{2}(1-t^2)) + D + \frac{1}{2}C$$

$$= (u, -\frac{1}{2} + t - \frac{1}{2}t^2) + D + \frac{1}{2}C = (u, -\frac{1}{2}t^2) + \frac{1}{2}C + D,$$

$$0 = (v, x) = \int_0^1 dx \{(u, (t-x)H_x) + D + Cx\} \cdot x$$

$$= \int_0^1 dx \left\{(t \cdot u, x \cdot H_x) - (u, x^2 \cdot H_x) + Dx + Cx^2\right\}$$

$$= (t \cdot u, \frac{1}{2}(1-t^2)) - (u, \frac{1}{3}(1-t^3)) + \frac{1}{2}D + \frac{1}{3}C$$

$$= (u, -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{6}t^3) + \frac{1}{2}D + \frac{1}{3}C = (u, -\frac{1}{6}t^3) + \frac{1}{3}C + \frac{1}{2}D.$$

すなわち

$$\begin{cases} C + 2D = (u, t^2) \\ 2C + 3D = (u, t^3) \end{cases}$$

である．これを解いて

$$C = (u, -3t^2 + 2t^3), \quad D = (u, 2t^2 - t^3)$$

が分かるから, (5) に代入して

$$v(x) = (u, t \cdot H_x) + D - (u, H_x)x + Cx$$
$$= (u, (t-x)H_x) + (u, 2t^2 - t^3) + (u, -3t^2 + 2t^3)x$$
$$= (u, (t-x)H_x + 2t^2 - t^3 + (-3t^2 + 2t^3)x)$$

である．$Tu(x) = v(x)$ にとれば良いから,

$$k(x,t) = (t-x)H_x(t) + 2t^2 - t^3 + (-3t^2 + 2t^3)x$$

である． $\square$

2-13 定理 $H(U_1)$ の正の固有値の逆数和は, $\frac{1}{15}$ である．

2-14 証明 補題 2-11 の証明と同様にして, $H(U_1)$ のリゾルベントはヒルベルトシュミット型であることが分かるから, 特にコンパクト作用素である．よって $H(U_1)$ は自己共役作用素なので, 固有関数からなる正規直交基底を持つ [(3),(4)]．定理 2-7 から $H(U_1)$ の負の固有値はない．定理 2-3 から $H(U_1)$ のゼロ固有空間は $1, x$ で張られるから,

$$\psi_1(x) = 1, \quad \psi_2(x) = \sqrt{3}(1 - 2x)$$

をゼロ固有空間の正規直交基底にとる．そこで正の固有値を $\lambda_n^2\,(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とし対応する固有関数 $\varphi_n(x)$ を,

$$\psi_j(x)\,(j = 1, 2), \quad \varphi_n(x)\,(n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が $\mathcal{H}$ の正規直交基底となる様にとることが出来る．実際は, 異なる固有値に対応する固有関数は互いに直交するから, 定理 2-3 から λ_n^2 に対応する固有関数を長さ 1 に正規化しておけば良い．まず

$$T\varphi_n(x) = \lambda_n^{-2}\varphi_n(x)\,(n = 1, 2, \cdots)$$

を示す．$H(U_1)\varphi_n = \lambda_n^2\varphi_n$ である．また $H(U_1)$ の異なる固有値に対応する固有関数は直交するから,

$$(\varphi_n, 1) = (\varphi_n, x) = 0$$

である．これより補題 2-11 より, $T\varphi_n \in \mathrm{Dom}(H(U_1))$ であり

$$H(U_1)\left(T\varphi_n - \lambda_n^{-2}\varphi_n\right) = \varphi_n - \varphi_n = 0$$

が成り立つ．これは $T\varphi_n - \lambda_n^{-2}\varphi_n$ がゼロ固有空間の元であることを意味する．一方補題 2-11 から $T\varphi_n$ はゼロ固有空間に直交し, φ_n もそうである．よって

$$T\varphi_n - \lambda_n^{-2}\varphi_n = 0$$

である．　次に, $T\psi_j\,(j = 1, 2)$ を計算する．

$$T\psi_1(x) = \left(1, (t-x)H_x(t) + 2t^2 - t^3 + (-3t^2 + 2t^3)x\right)$$

$$= \int_0^x (t-x)dt + \int_0^1 \{2t^2 - t^3 + (-3t^2 + 2t^3)x\}dt$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - x^2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + x\left(-1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{12},$$

$$T\psi_2(x) = \sqrt{3}\left(1 - 2t, (t-x)H_x(t) + 2t^2 - t^3 + (-3t^2 + 2t^3)x\right)$$

$$= \sqrt{3}\left(\int_0^x (1-2t)(t-x)dt + \int_0^1 (1-2t)\{2t^2 - t^3 + (-3t^2 + 2t^3)x\}dt\right)$$

$$= \sqrt{3}\left(\int_0^x \{t - 2t^2 - x(1-2t)\}dt + \int_0^1 \{2t^2 - 5t^3 + 2t^4 + (-3t^2 + 8t^3 - 4t^4)x\}dt\right)$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 - x(x - x^2) + \frac{2}{3} - \frac{5}{4} + \frac{2}{5} + (-1 + 2 - \frac{4}{5})x\right)$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{11}{60}\right)$$

である.

そこで, 任意の $u \in \mathcal{H}$ の元を正規直交基底 $\{\psi_j(x)\,(j=1,2), \varphi_n(x)\,(n=1,2,3,\cdots)\}$ で

$$u(x) = (u,\psi_1)\psi_1(x) + (u,\psi_2)\psi_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(u,\varphi_n)\varphi_n(x)$$

と展開して, T を作用させると

$$Tu(x) = (u,\psi_1)T\psi_1(x) + (u,\psi_2)T\psi_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(u,\varphi_n)\lambda_n^{-2}\varphi_n(x)$$

となる. 上式はヒルベルト空間の元として, a.e. x について成り立つ. さらに $k(x,t)$ は連続であるから $Tu(x)$ は x について連続である. また定理 2-5 より $\lambda_n^{-2} = O(n^{-2})$ であり, 固有関数が連続なので, 一様収束極限として左辺も連続関数である. よって上式は全ての $x \in I$ について成り立つ. そして任意に固定した $x \in I$ に対して上式を

$$(u(t), k(x,t)) = (u(t), \psi_1(t)\cdot T\psi_1(x) + \psi_2(t)\cdot T\psi_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2}\cdot\overline{\varphi_n(t)}\varphi_n(x))$$

と書き直すと, 再び一様収束極限として,

$$\psi_1(t)\cdot T\psi_1(x) + \psi_2(t)\cdot T\psi_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2}\cdot\overline{\varphi_n(t)}\varphi_n(x)$$

は (x,t) の関数として連続であることが分かり, $u(t) \in \mathcal{H}$ は任意であるから, (x,t) の連続関数として等式

$$k(x,t) = \psi_1(t)\cdot T\psi_1(x) + \psi_2(t)\cdot T\psi_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2}\cdot\overline{\varphi_n(t)}\varphi_n(x)$$

が成り立つ. さらに項別積分が可能なので

$$\int_0^1 k(x,x)dx = \int_0^1 \psi_1(x)\cdot T\psi_1(x)dx + \int_0^1 \psi_2(x)\cdot T\psi_2(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2}\cdot\int_0^1 |\varphi_n(x)|^2dx$$

となる.　ここで

$$\int_0^1 k(x,x)dx = \int_0^1 \{2x^2 - x^3 + (-3x^2 + 2x^3)x\}dx$$
$$= \int_0^1 (2x^4 - 4x^3 + 2x^2)dx = \frac{2}{5} - 1 + \frac{2}{3} = \frac{1}{15},$$

$$\int_0^1 \psi_1(x)\cdot T\psi_1(x)dx = \int_0^1 (-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{12})dx = -\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = 0,$$

$$\int_0^1 \psi_2(x)\cdot T\psi_2(x)dx = 3\int_0^1 (1-2x)\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{11}{60}\right)dx$$

$$= 3\int_0^1 (-\frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{9}{10}x^2 + \frac{17}{30}x - \frac{11}{60})dx$$

$$= 3\left(-\frac{2}{15} + \frac{1}{3} - \frac{3}{10} + \frac{17}{60} - \frac{11}{60}\right) = 0,$$

$$\int_0^1 |\varphi_n(x)|^2 dx = ||\varphi_n||^2 = 1$$

であるから,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} = \frac{1}{15}$$

である. □

2-14 注意

この結果は別のやり方からも得られる. 定理 2-5 より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n^{(1)}\right)^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n^{(2)}\right)^{-2}$$

である. $\lambda_n^{(1)} = 2\pi n$ であるから,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n^{(1)}\right)^{-2} = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{24}$$

である. 一方, $\lambda_n^{(2)} = 2\mu_n$ とおくと, $\mu_n\,(n=1,2,\cdots)$ は超越方程式 $\tan x = x$ の正の根であるから, オーバンの結果 [(1),(5)] から

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{-2} = \frac{1}{10}$$

が知られている. これより

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n^{(2)}\right)^{-2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^{-2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{40}$$

であるから,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2}=\frac{1}{24}+\frac{1}{40}=\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$$

が得られる．よって, この定理はオーバンの結果の別証明と見ることもできるし, またこの定理とオーバンの結果を併せて

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

の別証明を与えていると見ることも出来る．

3．固有値 μ^2 に対応する固有空間の次元が２となる $H(U)$

$\mu>0$ を任意に与えたとき, μ^2 を固有値とし, その固有空間 $\mathrm{Ker}\left(H(U)-\mu^2\right)$ の次元が 2 となる自己共役拡張 $H(U)$ が存在するかどうか調べる． もし存在するならば $H(U)v=\mu^2 v$ の解は, A,B を定数として

$$v(x)=A\cos(\mu x)+B\sin(\mu x)$$

の形であるから, 定理 2-3 の証明と同様にして,

$$\mathrm{Ker}\left(H(U)-\mu^2\right)=\mathrm{L.h.}[\cos(\mu x),\sin(\mu x)]$$

となっている．そこで

$$v_1(x)=\cos(\mu x),\quad v_2(x)=\sin(\mu x)$$

とおくと, 補題 2-1 から, U は方程式

$$(U-1)\begin{pmatrix}e^{\pi} & 1\\ 1 & e^{\pi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1'(1) & v_2'(1)\\ v_1'(0) & v_2'(0)\end{pmatrix}=\pi(1-i)(U-i)\begin{pmatrix}e^{\pi} & 1\\ -1 & -e^{\pi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1(1) & v_2(1)\\ v_2(0) & v_2(0)\end{pmatrix}$$

を満たす．すなわち

$$\begin{aligned}(U-1)\begin{pmatrix}e^{\pi} & 1\\ 1 & e^{\pi}\end{pmatrix}\mu\begin{pmatrix}-\sin\mu & \cos\mu\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ =\pi(1-i)(U-i)\begin{pmatrix}e^{\pi} & 1\\ -1 & -e^{\pi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\mu & \sin\mu\\ 1 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{6}$$

である．ここで

$$\det\begin{pmatrix}-\sin\mu & \cos\mu\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\cos\mu & \sin\mu\\ 1 & 0\end{pmatrix}=-\sin\mu$$

であるから, $\mu \in \{n\pi; n = 1, 2, \cdots\}$ かどうかで場合分けをして調べる.

3-1 定理 (i) ある自然数 m に対して $\mu = 2m\pi$ とする. このとき μ^2 が $H(U)$ の固有値であり, その固有空間の次元が 2 である為の必要十分条件は

$$U = U_2 = \frac{1+i}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \in U(2)$$

のときである. このとき $H(U_2)$ の境界条件は

$$\begin{cases} v'(1) = v'(0), \\ v(1) = v(0) \end{cases}$$

である. そして正の固有値は $(2n\pi)^2$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であり, 対応する固有空間は

$$\mathrm{Ker}\left(H(U_2) - (2n\pi)^2\right) = \mathrm{L.h.}\left[\cos(2n\pi x), \sin(2n\pi x)\right]$$

である. よって正の固有値に対応する固有空間の次元は全て 2 である. また U_2 の固有値は $1, i$ である.

(ii) ある自然数 m に対して $\mu = (2m-1)\pi$ とする. このとき μ^2 が $H(U)$ の固有値であり, その固有空間の次元が 2 である為の必要十分条件は

$$U = U_3 = \frac{1+i}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in U(2)$$

のときである. このとき $H(U_3)$ の境界条件は

$$\begin{cases} v'(1) = -v'(0), \\ v(1) = -v(0) \end{cases}$$

である. そして 正の固有値は $\{(2n-1)\pi\}^2$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であり, 対応する固有空間は

$$\mathrm{Ker}\left(H(U_2) - \{(2n-1)\pi\}^2\right) = \mathrm{L.h.}\left[\cos\left((2n-1)\pi x\right), \sin\left((2n-1)\pi x\right)\right]$$

である. よって正の固有値に対応する固有空間の次元は全て 2 である. また U_3 の固有値は $1, i$ である.

3-2 証明 (i) $\mu = 2m\pi$ に対して, (6) は

$$(U-1)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix} 2m\pi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \pi(1-i)(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. これを解いて U を求める.

$$2m(U-1)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1-i)(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U\left\{2m\begin{pmatrix} 0 & e^{\pi}+1 \\ 0 & e^{\pi}+1 \end{pmatrix} - (1-i)\begin{pmatrix} e^{\pi}+1 & 0 \\ -(e^{\pi}+1) & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= 2m\begin{pmatrix} 0 & e^{\pi}+1 \\ 0 & e^{\pi}+1 \end{pmatrix} - (1-i)i\begin{pmatrix} e^{\pi}+1 & 0 \\ -(e^{\pi}+1) & 0 \end{pmatrix},$$

$$U\begin{pmatrix} -(1-i)(e^{\pi}+1) & 2m(e^{\pi}+1) \\ (1-i)(e^{\pi}+1) & 2m(e^{\pi}+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1+i)(e^{\pi}+1) & 2m(e^{\pi}+1) \\ (1+i)(e^{\pi}+1) & 2m(e^{\pi}+1) \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} -(1+i) & 2m \\ (1+i) & 2m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -(1-i) & 2m \\ (1-i) & 2m \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{-1}{4m(1-i)}\begin{pmatrix} -(1+i) & 2m \\ (1+i) & 2m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2m & -2m \\ -(1-i) & -(1-i) \end{pmatrix} = \frac{-1}{4m(1-i)}\begin{pmatrix} -4m & 4mi \\ 4mi & -4m \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-i}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1+i}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

となる. 次にこのユニタリ行列 U に対して, $H(U)$ の境界条件

$$(U-1)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v'(1) \\ v'(0) \end{pmatrix} = \pi(1-i)(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v(1) \\ v(0) \end{pmatrix} \tag{7}$$

を計算する. この形から U が固有値 1 または i を持つかどうかで境界条件の表示が変わる. そこで U の固有値をまず求めておく.

$$\det(U-\lambda) = \det\begin{pmatrix} \frac{1+i}{2}-\lambda & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2}-\lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{1+i}{2}-\lambda\right)^2 - \left(\frac{1-i}{2}\right)^2 = 0$$

を解いて,

$$\lambda = \frac{1+i}{2} \pm (\frac{1-i}{2}) = 1, i$$

である. よって境界条件は, $v'(1), v'(0)$ と $v(1), v(0)$ の条件に分離する.

$$U-1 = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1+i}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U - i = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \frac{1-i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから, (7) に代入して

$$\frac{-1+i}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^\pi & 1 \\ 1 & e^\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'(1) \\ v'(0) \end{pmatrix} = \pi(1-i) \cdot \frac{1-i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^\pi & 1 \\ -1 & -e^\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(1) \\ v(0) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} e^\pi - 1 & -(e^\pi - 1) \\ -(e^\pi - 1) & e^\pi - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'(1) \\ v'(0) \end{pmatrix} = -\pi(1-i) \begin{pmatrix} e^\pi - 1 & -(e^\pi - 1) \\ e^\pi - 1 & -(e^\pi - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(1) \\ v(0) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'(1) \\ v'(0) \end{pmatrix} = -\pi(1-i) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(1) \\ v(0) \end{pmatrix}$$

となる．これは

$$\begin{cases} v'(1) - v'(0) = -\pi(1-i)\{v(1) - v(0)\} \\ -v'(1) + v'(0) = -\pi(1-i)\{v(1) - v(0)\} \end{cases}$$

を意味するから境界条件は

$$v'(1) = v'(0), \quad v(1) = v(0)$$

となる．次に $H(U_2)$ の正の固有値・固有空間を調べる．$H(U_2)v = \lambda^2 v \, (\lambda > 0)$ の解は, A, B を定数として

$$v(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$$

の形である．境界条件から, A, B の満たすべき方程式は

$$\begin{cases} -A\lambda\sin\lambda + B\lambda\cos\lambda = B\lambda \\ A\cos\lambda + B\sin\lambda = A \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} \sin\lambda & 1-\cos\lambda \\ 1-\cos\lambda & -\sin\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．$A = B = 0$ 以外の解が存在する λ は

$$\det \begin{pmatrix} \sin\lambda & 1-\cos\lambda \\ 1-\cos\lambda & -\sin\lambda \end{pmatrix} = -\sin^2\lambda - (1-\cos\lambda)^2 = 2(\cos\lambda - 1) = 0$$

を解いて, $\lambda = 2n\pi \, (n = 1, 2, \cdots)$ であり，このとき $\begin{pmatrix} \sin\lambda & 1-\cos\lambda \\ 1-\cos\lambda & -\sin\lambda \end{pmatrix}$ はゼロ行列であるから, 固有値 $(2n\pi)^2$ に対応する固有空間は, $\cos(2n\pi x), \sin(2n\pi x)$ で張られる．

(ii) $\mu=(2m-1)\pi$ に対して, (6) は

$$(U-1)\begin{pmatrix}e^\pi & 1\\ 1 & e^\pi\end{pmatrix}(2m-1)\pi\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\pi(1-i)(U-i)\begin{pmatrix}e^\pi & 1\\ -1 & -e^\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

となる. これを解いて U を求める.

$$(2m-1)(U-1)\begin{pmatrix}e^\pi & 1\\ 1 & e^\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=(1-i)(U-i)\begin{pmatrix}e^\pi & 1\\ -1 & -e^\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$U\left\{(2m-1)\begin{pmatrix}0 & -(e^\pi-1)\\ 0 & e^\pi-1\end{pmatrix}-(1-i)\begin{pmatrix}-(e^\pi-1) & 0\\ -(e^\pi-1) & 0\end{pmatrix}\right\}$$

$$=(2m-1)\begin{pmatrix}0 & -(e^\pi-1)\\ 0 & e^\pi-1\end{pmatrix}-(1-i)i\begin{pmatrix}-(e^\pi-1) & 0\\ -(e^\pi-1) & 0\end{pmatrix},$$

$$U\begin{pmatrix}(1-i)(e^\pi-1) & -(2m-1)(e^\pi-1)\\ (1-i)(e^\pi-1) & (2m-1)(e^\pi-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1+i)(e^\pi-1) & -(2m-1)(e^\pi-1)\\ (1+i)(e^\pi-1) & (2m-1)(e^\pi-1)\end{pmatrix}$$

$$U=\begin{pmatrix}1+i & -(2m-1)\\ 1+i & 2m-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-i & -(2m-1)\\ 1-i & 2m-1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{2(2m-1)(1-i)}\begin{pmatrix}1+i & -(2m-1)\\ 1+i & 2m-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2m-1 & 2m-1\\ -(1-i) & 1-i\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2(2m-1)(1-i)}\begin{pmatrix}2(2m-1) & 2i(2m-1)\\ 2i(2m-1) & 2(2m-1)\end{pmatrix}=\frac{1}{1-i}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}=\frac{1+i}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}$$

となる. U の固有値は,

$$\det(U-\lambda)=\det\begin{pmatrix}\frac{1+i}{2}-\lambda & \frac{-1+i}{2}\\ \frac{-1+i}{2} & \frac{1+i}{2}-\lambda\end{pmatrix}=\left(\frac{1+i}{2}-\lambda\right)^2-\left(\frac{-1+i}{2}\right)^2=0$$

を解いて,

$$\lambda=\frac{1+i}{2}\pm(\frac{-1+i}{2})=1,i$$

である. よって境界条件は, $v'(1),v'(0)$ と $v(1),v(0)$ の条件に分離する.

$$U-1=\begin{pmatrix}\frac{1+i}{2} & \frac{-1+i}{2}\\ \frac{-1+i}{2} & \frac{1+i}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{-1+i}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$U-i=\begin{pmatrix}\frac{1+i}{2} & \frac{-1+i}{2}\\ \frac{-1+i}{2} & \frac{1+i}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}=\frac{1-i}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

であるから, (7) に代入して

$$\frac{-1+i}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^\pi & 1\\ 1 & e^\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v'(1)\\ v'(0)\end{pmatrix}=\pi(1-i)\cdot\frac{1-i}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^\pi & 1\\ -1 & -e^\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v(1)\\ v(0)\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} e^\pi+1 & e^\pi+1 \\ e^\pi+1 & e^\pi+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v'(1) \\ v'(0) \end{pmatrix} = -\pi(1-i)\begin{pmatrix} e^\pi+1 & e^\pi+1 \\ -(e^\pi+1) & -(e^\pi+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v(1) \\ v(0) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v'(1) \\ v'(0) \end{pmatrix} = -\pi(1-i)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v(1) \\ v(0) \end{pmatrix}$$

となる．これは

$$\begin{cases} v'(1)+v'(0) = -\pi(1-i)\{v(1)+v(0)\} \\ v'(1)+v'(0) = -\pi(1-i)\{-v(1)-v(0)\} \end{cases}$$

を意味するから境界条件は

$$v'(1) = -v'(0), \quad v(1) = -v(0)$$

となる．次に $H(U_3)$ の正の固有値・固有空間を調べる．$H(U_3)v = \lambda^2 v\,(\lambda > 0)$ の解は, A, B を定数として

$$v(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$$

の形である．境界条件から, A, B の満たすべき方程式は

$$\begin{cases} -A\lambda\sin\lambda + B\lambda\cos\lambda = -B\lambda \\ A\cos\lambda + B\sin\lambda = -A \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} -\sin\lambda & 1+\cos\lambda \\ 1+\cos\lambda & \sin\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．$A = B = 0$ 以外の解が存在する λ は

$$\det\begin{pmatrix} -\sin\lambda & 1+\cos\lambda \\ 1+\cos\lambda & \sin\lambda \end{pmatrix} = -\sin^2\lambda - (1+\cos\lambda)^2 = -2(\cos\lambda+1) = 0$$

を解いて, $\lambda = (2n-1)\pi\,(n = 1, 2, \cdots)$ であり, このとき $\begin{pmatrix} -\sin\lambda & 1+\cos\lambda \\ 1+\cos\lambda & \sin\lambda \end{pmatrix}$ はゼロ行列であるから, 固有値 $\{(2n-1)\pi\}^2$ に対応する固有空間は, $\cos((2n-1)\pi x), \sin((2n-1)\pi x)$ で張られる． $\square$

3-3 定理 (i) $H(U_2)$ はゼロ固有値をもち, その固有空間は 1 で張られる．

(ii) $H(U_3)$ はゼロ固有値を持たない．

3-4 証明 (i) $H(U_2)v = 0$ の解は, A, B を定数として, $v(x) = A + Bx$ の形である．境界条件

$$v(1) = v(0), \quad v'(1) = v'(0)$$

より

$$A + B = A, \quad B = B$$

を満たせば良いから, $B = 0$. よって定数関数が解となる.

(ii) $H(U_3)v = 0$ の解は, A, B を定数として, $v(x) = A + Bx$ の形である．境界条件

$$v(1) = -v(0), \quad v'(1) = -v'(0)$$

より

$$A + B = -A, \quad B = -B$$

を満たすものは $A = B = 0$ のみである． $\square$

3-5 定理 $H(U_2), H(U_3)$ は負の固有値を持たない.

3-6 証明 (i) $H(U_2)v = -\lambda^2 v\,(\lambda > 0)$ の解は, A, B を定数として, $v(x) = Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x}$ の形である．境界条件

$$v(1) = v(0), \quad v'(1) = v'(0)$$

より, A, B は

$$Ae^{-\lambda} + Be^{\lambda} = A + B, \quad -A\lambda e^{-\lambda} + B\lambda e^{\lambda} = -A\lambda + B\lambda,$$

$$\begin{pmatrix} e^{-\lambda} - 1 & e^{\lambda} - 1 \\ -e^{-\lambda} + 1 & e^{\lambda} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす．ここで

$$\det \begin{pmatrix} e^{-\lambda} - 1 & e^{\lambda} - 1 \\ -e^{-\lambda} + 1 & e^{\lambda} - 1 \end{pmatrix} = (e^{-\lambda} - 1)(e^{\lambda} - 1) - (e^{\lambda} - 1)(-e^{-\lambda} + 1)$$

$$= 2(2 - e^{-\lambda} - e^{\lambda}) < 0$$

であるから, $A = B = 0$ である.

(ii) $H(U_3)v = -\lambda^2 v\,(\lambda > 0)$ の解は, A, B を定数として, $v(x) = Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x}$ の形である．境界条件

$$v(1) = -v(0), \quad v'(1) = -v'(0)$$

より, A, B は

$$Ae^{-\lambda} + Be^{\lambda} = -A - B, \quad -A\lambda e^{-\lambda} + B\lambda e^{\lambda} = A\lambda - B\lambda,$$
$$\begin{pmatrix} e^{-\lambda}+1 & e^{\lambda}+1 \\ -e^{-\lambda}-1 & e^{\lambda}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす．ここで

$$\det \begin{pmatrix} e^{-\lambda}+1 & e^{\lambda}+1 \\ -e^{-\lambda}-1 & e^{\lambda}+1 \end{pmatrix} = 2(e^{-\lambda}+1)(e^{\lambda}+1) > 0$$

であるから, $A = B = 0$ である． $\square$

3-7 定理 $H(U_2)$ の正の固有値の逆数和は重複度も込めて, $\frac{1}{12}$ であり, $H(U_3)$ の場合は重複度を込めて $\frac{1}{4}$ である．

3-8 証明 (i) 各固有値 $(2n\pi)^2$ は 2 重に縮退しているので, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ の結果を用いるなら,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n\pi)^2} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{12}$$

となる．我々のやり方の別証明を与える．$H(U_2)$ の正の固有値を重複度も込めて $\{\lambda_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ とする．$(u, 1) = 0$ を満たす $u \in \mathcal{H}$ に対して, $-v'' = u$ の解で境界条件と, $(v, 1) = 0$ を満たすものを補題 2-11 の様にして求めることが出来る．$v(x) = (u(t), k(x,t)) = Tu(x)$ と表すと,

$$k(x,t) = (t-x)H_x(t) + \frac{1}{2}t^2 - 2t + 1 + x(1-t)$$

と分かる．このとき定理 2-13 の証明と同様にして

$$\int_0^1 k(x,x)dx = \int_0^1 (T1)(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}$$

が成り立つ．ここで

$$(T1)(x) = \int_0^x (t-x)dt + \int_0^1 \{\frac{1}{2}t^2 - 2t + 1 + x(1-t)\}dt = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6},$$

$$\int_0^1 (T1)(x)dx = \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 k(x,x)dx = \int_0^1 (-\frac{1}{2}x^2 - x + 1)dx = \frac{1}{3}$$

より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

である.

(ii) 各固有値 $\{(2n-1)\pi\}^2$ は 2 重に縮退しているので, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ の結果を用いるなら,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\{(2n-1)\pi\}^2} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{4}$$

となる. 我々のやり方の別証明を与える. $H(U_3)$ の正の固有値を重複度も込めて $\{\lambda_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ とする. ゼロ固有値はないので, 逆作用素を作れば良い. $-v'' = u$ の解で境界条件を満たすものを補題 2-11 の様にして求めることが出来る. $v(x) = (u(t), k(x,t)) = Tu(x)$ と表すと,

$$k(x,t) = (t-x)H_x(t) - \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x$$

と分かる. このとき定理 2-13 の証明と同様にして

$$\int_0^1 k(x,x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}$$

が成り立つ. よって

$$\int_0^1 k(x,x)dx = \int_0^1 (-x + \frac{3}{4})dx = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

である. □

今度は $\mu > 0, \mu \notin \{n\pi; n = 1, 2, \cdots\}$ のとき, μ^2 を固有値とし, 対応する固有空間の次元が 2 となる $H(U)$ を探し, その性質を調べる. 次がいえる.

3-9 定理 $\mu > 0, \sin\mu \neq 0$ とする.

(i) μ^2 が $H(U)$ の固有値であり, その固有空間の次元が 2 である為の必要十分条件は $U = U_4 = PVP$ のときである．ここで

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\mu-\pi\alpha-i\pi\alpha}{\mu-\pi\alpha+i\pi\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{\mu+\pi\alpha^{-1}+i\pi\alpha^{-1}}{\mu+\pi\alpha^{-1}-i\pi\alpha^{-1}} \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \tanh(\frac{\pi}{2})\tan(\frac{\mu}{2})$$

である．$P = P^T = P^* = P^{-1}$ であるから, U_4 の固有値は

$$\frac{\mu-\pi\alpha-i\pi\alpha}{\mu-\pi\alpha+i\pi\alpha}, \quad \frac{\mu+\pi\alpha^{-1}+i\pi\alpha^{-1}}{\mu+\pi\alpha^{-1}-i\pi\alpha^{-1}}$$

である．

(ii) $H(U_4)$ の境界条件は

$$\begin{cases} v'(1)+v'(0) = \frac{\mu}{\tan(\frac{\mu}{2})}\{v(1)-v(0)\} \\ v'(1)-v'(0) = -\mu\tan(\frac{\mu}{2})\{v(1)+v(0)\} \end{cases}$$

である．

(iii) $H(U_4)$ の正の固有値は μ^2 と $(\lambda_n^{(1)})^2, (\lambda_n^{(2)})^2$ $(n = 1, 2, \cdots)$ である．ここで $\lambda_n^{(1)}$ は

$$\lambda > 0, \quad \lambda \neq \mu, \quad \lambda^{-1}\tan(\frac{\lambda}{2}) = \mu^{-1}\tan(\frac{\mu}{2})$$

を満たす小さい方から n 番目の根であり, $\lambda_n^{(2)}$ は

$$\lambda > 0, \quad \lambda \neq \mu, \quad \lambda\tan(\frac{\lambda}{2}) = \mu\tan(\frac{\mu}{2})$$

を満たす小さい方から n 番目の根である．任意の自然数 m, n に対して $\lambda_m^{(1)} \neq \lambda_n^{(2)}$ となっている．

(iv) μ^2 に対応する固有空間の次元は 2 で, $\cos(\mu x), \sin(\mu x)$ で張られる．

(v) $(\lambda_n^{(1)})^2$ に対応する固有空間の次元は 1 で, $-\sin(\frac{\lambda_n^{(1)}}{2})\cos(\lambda_n^{(1)}x)+\cos(\frac{\lambda_n^{(1)}}{2})\sin(\lambda_n^{(1)}x)$ で張られる．

(vi) $(\lambda_n^{(2)})^2$ に対応する固有空間の次元は 1 で, $\cos(\frac{\lambda_n^{(2)}}{2})\cos(\lambda_n^{(2)}x)+\sin(\frac{\lambda_n^{(2)}}{2})\sin(\lambda_n^{(2)}x)$ で張られる．

3-10 証明

(6) から U を決める. $\sin\mu \neq 0$ なので, 逆行列がとれる.

$$(U-1)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix}\mu\begin{pmatrix} -\sin\mu & \cos\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \pi(1-i)(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\mu & \sin\mu \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

から,

$$U-1 = \frac{\pi(1-i)}{\mu}(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\mu & \sin\mu \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin\mu & \cos\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{-\pi(1-i)}{\mu\sin\mu\cdot(e^{2\pi}-1)}(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\mu & \sin\mu \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\cos\mu \\ 0 & -\sin\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\pi} & -1 \\ -1 & e^{\pi} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-\pi(1-i)}{\mu\sin\mu\cdot(e^{2\pi}-1)}(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\mu & \sin\mu \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\pi}+\cos\mu & -e^{\pi}\cos\mu-1 \\ \sin\mu & -e^{\pi}\sin\mu \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-\pi(1-i)}{\mu\sin\mu\cdot(e^{2\pi}-1)}(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\pi}\cos\mu+1 & -e^{\pi}-\cos\mu \\ e^{\pi}+\cos\mu & -e^{\pi}\cos\mu-1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-\pi(1-i)}{\mu\sin\mu\cdot(e^{2\pi}-1)}(U-i)\begin{pmatrix} (e^{2\pi}+1)\cos\mu+2e^{\pi} & -(e^{2\pi}+1)-2e^{\pi}\cos\mu \\ -(e^{2\pi}+1)-2e^{\pi}\cos\mu & (e^{2\pi}+1)\cos\mu+2e^{\pi} \end{pmatrix}$$

となる. $A = \begin{pmatrix} (e^{2\pi}+1)\cos\mu+2e^{\pi} & -(e^{2\pi}+1)-2e^{\pi}\cos\mu \\ -(e^{2\pi}+1)-2e^{\pi}\cos\mu & (e^{2\pi}+1)\cos\mu+2e^{\pi} \end{pmatrix}$ は $P = P^{-1}$ で対角化出来る. 実際,

$$PAP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (e^{2\pi}+1)\cos\mu+2e^{\pi} & -(e^{2\pi}+1)-2e^{\pi}\cos\mu \\ -(e^{2\pi}+1)-2e^{\pi}\cos\mu & (e^{2\pi}+1)\cos\mu+2e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (e^{\pi}-1)^2(\cos\mu-1) & (e^{\pi}+1)^2(\cos\mu+1) \\ (e^{\pi}-1)^2(\cos\mu-1) & -(e^{\pi}+1)^2(\cos\mu+1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (e^{\pi}-1)^2(\cos\mu-1) & 0 \\ 0 & (e^{\pi}+1)^2(\cos\mu+1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2(e^{\pi}-1)^2\sin^2(\frac{\mu}{2}) & 0 \\ 0 & 2(e^{\pi}+1)^2\cos^2(\frac{\mu}{2}) \end{pmatrix}$$

となる. そこで $U-1 = \frac{-\pi(1-i)}{\mu\sin\mu\cdot(e^{2\pi}-1)}(U-i)A$ の左右から P を掛ける. $P = P^{-1}, \alpha = \tanh(\frac{\pi}{2})\tan(\frac{\mu}{2})$ に注意して

$$P(U-1)P = \frac{-\pi(1-i)}{\mu\sin\mu\cdot(e^{2\pi}-1)}P(U-i)P\cdot PAP$$

$$V-1=\frac{-\pi(1-i)}{2\mu\sin(\frac{\mu}{2})\cos(\frac{\mu}{2})\cdot(e^\pi-1)(e^\pi+1)}(V-i)\cdot\begin{pmatrix}-2(e^\pi-1)^2\sin^2(\frac{\mu}{2}) & 0\\ 0 & 2(e^\pi+1)^2\cos^2(\frac{\mu}{2})\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\pi(1-i)}{\mu}(V-i)\cdot\begin{pmatrix}\frac{(e^\pi-1)\sin(\frac{\mu}{2})}{(e^\pi+1)\cos(\frac{\mu}{2})} & 0\\ 0 & -\frac{(e^\pi+1)\cos(\frac{\mu}{2})}{(e^\pi-1)\sin(\frac{\mu}{2})}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\pi}{\mu}(1-i)(V-i)\cdot\begin{pmatrix}\frac{(e^\pi-1)\sin(\frac{\mu}{2})}{(e^\pi+1)\cos(\frac{\mu}{2})} & 0\\ 0 & -\frac{(e^\pi+1)\cos(\frac{\mu}{2})}{(e^\pi-1)\sin(\frac{\mu}{2})}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\pi}{\mu}(1-i)(V-i)\cdot\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & -\alpha^{-1}\end{pmatrix}$$

となる．これより V について解けて

$$V\begin{pmatrix}\mu-\pi(1-i)\alpha & 0\\ 0 & \mu+\pi(1-i)\alpha^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu-\pi(1+i)\alpha & 0\\ 0 & \mu+\pi(1+i)\alpha^{-1}\end{pmatrix}$$

より

$$V=\begin{pmatrix}\frac{\mu-\pi(1+i)\alpha}{\mu-\pi(1-i)\alpha} & 0\\ 0 & \frac{\mu+\pi(1+i)\alpha^{-1}}{\mu+\pi(1-i)\alpha^{-1}}\end{pmatrix}$$

となる．よって $U=PVP$ と定まる．

次に境界条件を決める．

$$(U-1)\begin{pmatrix}e^\pi & 1\\ 1 & e^\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v'(1)\\ v'(0)\end{pmatrix}=\pi(1-i)(U-i)\begin{pmatrix}e^\pi & 1\\ -1 & -e^\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v(1)\\ v(0)\end{pmatrix}$$

の左から P を掛ける．

$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}e^\pi & 1\\ 1 & e^\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v'(1)\\ v'(0)\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}e^\pi & 1\\ -1 & -e^\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v(1)\\ v(0)\end{pmatrix}$$

とおく．$PP=1$ より

$$P(U-1)P\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\pi(1-i)P(U-i)P\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},$$

$$(V-1)\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\pi(1-i)(V-i)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\frac{-2i\pi\alpha}{\mu-\pi(1-i)\alpha} & 0\\ 0 & \frac{2i\pi\alpha^{-1}}{\mu+\pi(1-i)\alpha^{-1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\pi(1-i)\begin{pmatrix}\frac{(1-i)\mu}{\mu-\pi(1-i)\alpha} & 0\\ 0 & \frac{(1-i)\mu}{\mu+\pi(1-i)\alpha^{-1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},$$

これより $(1-i)^2=-2i$ に注意して

$$\mu x=\alpha u,\quad \mu y=\alpha v$$

であるから

$$\mu\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&-\alpha^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

である．よって境界条件は

$$\frac{\mu}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^\pi&1\\-1&-e^\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v(1)\\v(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&-\alpha^{-1}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^\pi&1\\1&e^\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v'(1)\\v'(0)\end{pmatrix},$$

$$\mu\begin{pmatrix}e^\pi-1&-(e^\pi-1)\\e^\pi+1&e^\pi+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v(1)\\v(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&-\alpha^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^\pi+1&e^\pi+1\\e^\pi-1&-(e^\pi+1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v'(1)\\v'(0)\end{pmatrix},$$

$$\mu\begin{pmatrix}(e^\pi-1)\{v(1)-v(0)\}\\(e^\pi+1)\{v(1)+v(0)\}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&-\alpha^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(e^\pi+1)\{v'(1)+v'(0)\}\\(e^\pi-1)\{v'(1)-v'(0)\}\end{pmatrix}$$

となる．これより $\frac{e^\pi-1}{e^\pi+1}=\tanh(\frac{\pi}{2})$ に注意して

$$\mu\tanh(\frac{\pi}{2})\{v(1)-v(0)\}=\alpha\{v'(1)+v'(0)\},\quad \mu\{v(1)+v(0)\}=-\alpha^{-1}\tanh(\frac{\pi}{2})\{v'(1)-v'(0)\}.$$

すなわち

$$\begin{cases}v'(1)+v'(0)=\frac{\mu}{\tan(\frac{\mu}{2})}\{v(1)-v(0)\}\\ v'(1)-v'(0)=-\mu\tan(\frac{\mu}{2})\{v(1)+v(0)\}\end{cases}$$

となる．

$H(U_4)$ の正の固有値を調べる．$\lambda>0$ とする．$H(U_4)v=\lambda^2v$ は $-v''(x)=\lambda^2v(x)$ を意味するから,

$$v(x)=A\cos(\lambda x)+B\sin(\lambda x)\quad (A,B;\text{定数})$$

の形である．

$$v(1)=A\cos\lambda+B\sin\lambda,\quad v(0)=A,\quad v'(1)=-A\lambda\sin\lambda+B\lambda\cos\lambda,\quad v'(0)=B\lambda$$

から,

$$v(1)+v(0)=A(\cos\lambda+1)+B\sin\lambda=2\cos(\frac{\lambda}{2})\{A\cos(\frac{\lambda}{2})+B\sin(\frac{\lambda}{2})\},$$

$$v(1)-v(0)=A(\cos\lambda-1)+B\sin\lambda=2\sin(\frac{\lambda}{2})\{-A\sin(\frac{\lambda}{2})+B\cos(\frac{\lambda}{2})\},$$

$$v'(1)+v'(0)=-A\lambda\sin\lambda+B(\cos\lambda+1)=2\lambda\cos(\frac{\lambda}{2})\{-A\sin(\frac{\lambda}{2})+B\cos(\frac{\lambda}{2})\},$$

$$v'(1)-v'(0)=-A\lambda\sin\lambda+B(\cos\lambda-1)=-2\lambda\sin(\frac{\lambda}{2})\{A\cos(\frac{\lambda}{2})+B\sin(\frac{\lambda}{2})\}$$

となる．これらを境界条件に代入して A, B についての方程式

$$\begin{cases}2\lambda\cos(\frac{\lambda}{2})\{-A\sin(\frac{\lambda}{2})+B\cos(\frac{\lambda}{2})\}=\frac{\mu}{\tan(\frac{\mu}{2})}\cdot 2\sin(\frac{\lambda}{2})\{-A\sin(\frac{\lambda}{2})+B\cos(\frac{\lambda}{2})\}\\ -2\lambda\sin(\frac{\lambda}{2})\{A\cos(\frac{\lambda}{2})+B\sin(\frac{\lambda}{2})\}=-\mu\tan(\frac{\mu}{2})\cdot 2\cos(\frac{\lambda}{2})\{A\cos(\frac{\lambda}{2})+B\sin(\frac{\lambda}{2})\},\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(\frac{\mu}{\tan(\frac{\mu}{2})}\cdot\sin(\frac{\lambda}{2})-\lambda\cos(\frac{\lambda}{2})\right)\{-A\sin(\frac{\lambda}{2})+B\cos(\frac{\lambda}{2})\}=0\\ \left(\mu\tan(\frac{\mu}{2})\cdot\cos(\frac{\lambda}{2})-\lambda\sin(\frac{\lambda}{2})\right)\{A\cos(\frac{\lambda}{2})+B\sin(\frac{\lambda}{2})\}=0,\end{cases}$$

が得られる．

$$a=\frac{\mu}{\tan(\frac{\mu}{2})}\cdot\sin(\frac{\lambda}{2})-\lambda\cos(\frac{\lambda}{2}),\quad b=\mu\tan(\frac{\mu}{2})\cdot\cos(\frac{\lambda}{2})-\lambda\sin(\frac{\lambda}{2})$$

とおくと

$$\begin{pmatrix}-a\sin(\frac{\lambda}{2}) & a\cos(\frac{\lambda}{2})\\ b\cos(\frac{\lambda}{2}) & b\sin(\frac{\lambda}{2})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

が得られる．よって $A=B=0$ 以外の解が存在する λ は,

$$\det\begin{pmatrix}-a\sin(\frac{\lambda}{2}) & a\cos(\frac{\lambda}{2})\\ b\cos(\frac{\lambda}{2}) & b\sin(\frac{\lambda}{2})\end{pmatrix}=-ab=0$$

を満たさなければならない．$\lambda=\mu$ のときは, $a=b=0$ となるので, μ^2 は $H(U_4)$ の固有値で対応する固有空間は $\cos(\mu x), \sin(\mu x)$ で張られる．よってその次元は 2 である．

$\lambda\neq\mu, a=0$ とする．$\cos(\frac{\lambda}{2})=0$ ならば, $a=0$ より $\sin(\frac{\lambda}{2})=0$ となり矛盾である．よって $\cos(\frac{\lambda}{2})\neq 0$ であるから,

$$\lambda^{-1}\tan(\frac{\lambda}{2})=\mu^{-1}\tan(\frac{\mu}{2})$$

が成り立つので,

$$\lambda=\lambda_n^{(1)}\ (n=1,2,\cdots)$$

である．さらに $b=0$ も起こるとすると

$$\frac{\mu}{\tan(\frac{\mu}{2})}\cdot\sin(\frac{\lambda}{2})=\lambda\cos(\frac{\lambda}{2}),\quad \mu\tan(\frac{\mu}{2})\cdot\cos(\frac{\lambda}{2})=\lambda\sin(\frac{\lambda}{2})$$

なので, 辺々を掛けて

$$\mu^2 \sin(\frac{\lambda}{2}) \cos(\frac{\lambda}{2}) = \lambda^2 \sin(\frac{\lambda}{2}) \cos(\frac{\lambda}{2}).$$

$\lambda \neq \mu$ より

$$\sin(\frac{\lambda}{2}) \cos(\frac{\lambda}{2}) = 0$$

となる. $\cos(\frac{\lambda}{2}) \neq 0$ より $\sin(\frac{\lambda}{2}) = 0$ であるが, $a = 0$ から $\cos(\frac{\lambda}{2}) = 0$ となり矛盾が起こる. そこで $b \neq 0$ であるから, A, B は

$$\cos(\frac{\lambda}{2})A + \cos(\frac{\lambda}{2})B = 0$$

を満たせば良いので, 固有関数は

$$A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) = \frac{B}{\cos(\frac{\lambda}{2})}\left\{-\sin(\frac{\lambda}{2})\cos(\lambda x) + \cos(\frac{\lambda}{2})\sin(\lambda x)\right\}$$

の形である.

$\lambda \neq \mu, b = 0$ とする. $\cos(\frac{\lambda}{2}) = 0$ ならば, $b = 0$ より $\sin(\frac{\lambda}{2}) = 0$ となり矛盾である. よって $\cos(\frac{\lambda}{2}) \neq 0$ であるから,

$$\lambda \tan(\frac{\lambda}{2}) = \mu \tan(\frac{\mu}{2})$$

が成り立つので,

$$\lambda = \lambda_n^{(2)}\ (n = 1, 2, \cdots)$$

である. さらに $a = 0$ も起こるとすると矛盾が起こるから, $a \neq 0$ である. A, B は

$$-\sin(\frac{\lambda}{2})A + \cos(\frac{\lambda}{2})B = 0$$

を満たせば良いので, 固有関数は

$$A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) = \frac{A}{\cos(\frac{\lambda}{2})}\left\{\cos(\frac{\lambda}{2})\cos(\lambda x) + \sin(\frac{\lambda}{2})\sin(\lambda x)\right\}$$

の形である. $\lambda \neq \mu$ のとき, $a = b = 0$ は成り立たないので, 任意の自然数 m, n に対して $\lambda_m^{(1)} \neq \lambda_n^{(2)}$ である. $\square$

3-11 定理 $\mu > 0, \sin\mu \neq 0$ とする．$H(U_4)$ がゼロ固有値をもつ為の必要十分条件は

$$\tan(\frac{\mu}{2}) = \frac{\mu}{2}$$

が成り立つことである．このときゼロ固有空間は, $x - \frac{1}{2}$ で張られる．

3-12 証明 $H(U_4)v = 0$ は $-v''(x) = 0$ を意味するから, A, B を定数として, $v(x) = A + Bx$ の形である．

$$v(1) + v(0) = 2A + B, \quad v(1) - v(0) = B, \quad v'(1) + v'(0) = 2B, \quad v'(1) - v'(0) = 0$$

であるから, 境界条件より A, B は

$$2B = \frac{\mu}{\tan(\frac{\mu}{2})} B, \quad 0 = -\mu \tan(\frac{\mu}{2})(2A + B)$$

を満たす．$\tan(\frac{\mu}{2}) \neq \frac{\mu}{2}$ のときは, $B = 0$ であり, $2A + B = 0$ から $A = B = 0$ である．また $\tan(\frac{\mu}{2}) = \frac{\mu}{2}$ のときは, $2A + B = 0$ のみが条件なので,

$$A + Bx = B(x - \frac{1}{2})$$

である． □

3-13 定理 $\mu > 0, \sin\mu \neq 0$ とする．$-\lambda^2\,(\lambda > 0)$ が $H(U_4)$ は負の固有値となる必要十分条件は, $\lambda > 0$ が次のどちらかの方程式の解となることである．

$$\frac{\frac{\lambda}{2}}{\tanh(\frac{\lambda}{2})} = \frac{\frac{\mu}{2}}{\tan(\frac{\mu}{2})} \tag{8}$$

$$(\frac{\lambda}{2})\tanh(\frac{\lambda}{2}) = -(\frac{\mu}{2})\tan(\frac{\mu}{2}) \tag{9}$$

なお方程式 (8), (9) に共通根はない．さらに詳しくは,

(i) $0 < \frac{\mu}{2} < \frac{\pi}{2}$ のときは, 方程式 (8), (9) は根をもたないので, 負の固有値はない．

(ii) $n\pi - \frac{\pi}{2} < \frac{\mu}{2} < n\pi\,(n = 1, 2, \cdots)$ のときは, 方程式 (8) に根はなく, (9) は唯 1 つの根 λ をもつ. 固有値 $-\lambda^2$ に対応する固有空間は, $e^{\lambda}e^{-\lambda x} + e^{\lambda x}$ で張られる.

(iii) $n\pi < \frac{\mu}{2} < n\pi + \frac{\pi}{2}\,(n = 1, 2, \cdots)$ のときは, 方程式 (9) に根はない. この範囲で方程式 $\tan\lambda = \lambda$ の唯 1 つの根を λ_n とする. (8) は $\lambda_n \leq \frac{\mu}{2} < n\pi + \frac{\pi}{2}$ のとき根はなく, $n\pi < \frac{\mu}{2} < \lambda_n$ ならば唯 1 つの根 λ をもつ. 固有値 $-\lambda^2$ に対応する固有空間は, $-e^{\lambda}e^{-\lambda x} + e^{\lambda x}$ で張られる.

3-14 証明

$\lambda > 0$ とする. $H(U_4)v = -\lambda^2 v$ は $-v''(x) = -\lambda^2 v(x)$ を意味するから,

$$v(x) = Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x} \quad (A, B; \text{定数})$$

の形である.

$$v(1) + v(0) = A(e^{-\lambda} + 1) + B(e^{\lambda} + 1), \quad v(1) - v(0) = A(e^{-\lambda} - 1) + B(e^{\lambda} - 1),$$
$$v'(1) + v'(0) = -A\lambda(e^{-\lambda} + 1) + B\lambda(e^{\lambda} + 1), \quad v'(1) - v'(0) = -A\lambda(e^{-\lambda} - 1) + B\lambda(e^{\lambda} - 1)$$

を境界条件に代入して A, B についての方程式

$$\begin{cases} -A\lambda(e^{-\lambda} + 1) + B\lambda(e^{\lambda} + 1) = \frac{\mu}{\tan(\frac{\mu}{2})}\left(A(e^{-\lambda} - 1) + B(e^{\lambda} - 1)\right) \\ -A\lambda(e^{-\lambda} - 1) + B\lambda(e^{\lambda} - 1) = -\mu\tan(\frac{\mu}{2})\left(A(e^{-\lambda} + 1) + B(e^{\lambda} + 1)\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} -A\lambda e^{-\frac{\lambda}{2}}(e^{-\frac{\lambda}{2}} + e^{\frac{\lambda}{2}}) + B\lambda e^{\frac{\lambda}{2}}(e^{\frac{\lambda}{2}} + e^{-\frac{\lambda}{2}}) \\ = \frac{\mu}{\tan(\frac{\mu}{2})}\left(Ae^{-\frac{\lambda}{2}}(e^{-\frac{\lambda}{2}} - e^{\frac{\lambda}{2}}) + Be^{\frac{\lambda}{2}}(e^{\frac{\lambda}{2}} - e^{-\frac{\lambda}{2}})\right) \\ -A\lambda e^{-\frac{\lambda}{2}}(e^{-\frac{\lambda}{2}} - e^{\frac{\lambda}{2}}) + B\lambda e^{\frac{\lambda}{2}}(e^{\frac{\lambda}{2}} - e^{-\frac{\lambda}{2}}) \\ = -\mu\tan(\frac{\mu}{2})\left(Ae^{-\frac{\lambda}{2}}(e^{-\frac{\lambda}{2}} + e^{\frac{\lambda}{2}}) + Be^{\frac{\lambda}{2}}(e^{\frac{\lambda}{2}} + e^{-\frac{\lambda}{2}})\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} -A\lambda e^{-\frac{\lambda}{2}} + B\lambda e^{\frac{\lambda}{2}} = \frac{\mu}{\tan(\frac{\mu}{2})}\left(-Ae^{-\frac{\lambda}{2}}\tanh(\frac{\lambda}{2}) + Be^{\frac{\lambda}{2}}\tanh(\frac{\lambda}{2})\right) \\ A\lambda e^{-\frac{\lambda}{2}}\tanh(\frac{\lambda}{2}) + B\lambda e^{\frac{\lambda}{2}}\tanh(\frac{\lambda}{2}) = -\mu\tan(\frac{\mu}{2})\left(Ae^{-\frac{\lambda}{2}} + Be^{\frac{\lambda}{2}}\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} -A\lambda e^{-\frac{\lambda}{2}} + B\lambda e^{\frac{\lambda}{2}} = \frac{\mu}{\tan(\frac{\mu}{2})}\left(-Ae^{-\frac{\lambda}{2}}\tanh(\frac{\lambda}{2}) + Be^{\frac{\lambda}{2}}\tanh(\frac{\lambda}{2})\right) \\ A\lambda e^{-\frac{\lambda}{2}}\tanh(\frac{\lambda}{2}) + B\lambda e^{\frac{\lambda}{2}}\tanh(\frac{\lambda}{2}) = -\mu\tan(\frac{\mu}{2})\left(Ae^{-\frac{\lambda}{2}} + Be^{\frac{\lambda}{2}}\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\tanh(\frac{\lambda}{2})} - \frac{\mu}{\tan(\frac{\mu}{2})}\right)\left(-A\lambda e^{-\frac{\lambda}{2}} + B\lambda e^{\frac{\lambda}{2}}\right) = 0 \\ \left(\lambda\tanh(\frac{\lambda}{2}) + \mu\tan(\frac{\mu}{2})\right)\left(Ae^{-\frac{\lambda}{2}} + Be^{\frac{\lambda}{2}}\right) = 0 \end{cases}$$

が得られる．$A=B=0$ 以外の解が存在する $\lambda>0$ は,

$$\left(\frac{\lambda}{\tanh(\frac{\lambda}{2})}-\frac{\mu}{\tan(\frac{\mu}{2})}\right)\left(\lambda\tanh(\frac{\lambda}{2})+\mu\tan(\frac{\mu}{2})\right)=0$$

を満たさなければならない．ここで $f(x)=\frac{x}{\tanh(x)}$ は単調増加で

$$f(x)>1(x>0),\quad f(\infty)=\infty,$$

である．また $g(x)=x\tanh(x)$ は $x>0$ で単調増加で,

$$g(0)=0,\quad g(\infty)=\infty$$

である．よって
(i) $0<a<\frac{\pi}{2}$ のときは

$$f(x)>1>\frac{a}{\tan a},\quad -a\tan a<0<g(x)$$

なので, $f(x)=\frac{a}{\tan a}, g(x)=-a\tan a$ を満たす $x>0$ はない．

(ii) $n\pi-\frac{\pi}{2}<a<n\pi\,(n=1,2,\cdots)$ のときは, $\frac{a}{\tan a}<0<1<f(x)$ なので, $f(x)=\frac{a}{\tan a}$ を満たす $x>0$ はないが, $0<-a\tan a$ なので $g(x)=-a\tan a$ を満たす $x>0$ が唯1つある．

(iii) $n\pi<a<n\pi+\frac{\pi}{2},(n=1,2,\cdots)$ ときは, $-a\tan a<0<g(x)$ なので, $g(x)=-a\tan a$ を満たす $x>0$ はない．また, $\lambda_n\leq a<n\pi+\frac{\pi}{2}$ のとき, $\frac{a}{\tan a}\leq 1<f(x)$ なので, $f(x)=\frac{a}{\tan a}$ を満たす $x>0$ は存在しない．$n\pi<a<\lambda_n$ のときは, $1<\frac{a}{\tan a}$ であるから, $f(x)=\frac{a}{\tan a}$ を満たす $x>0$ が唯1つ存在する．

以上の議論から, $\lambda>0$ のとき

$$\frac{\lambda}{\tanh(\frac{\lambda}{2})}=\frac{\mu}{\tan(\frac{\mu}{2})},\quad \lambda\tanh(\frac{\lambda}{2})=-\mu\tan(\frac{\mu}{2})$$

が同時に成り立つことはないから, $\frac{\lambda}{\tanh(\frac{\lambda}{2})}=\frac{\mu}{\tan(\frac{\mu}{2})}$ となれば, $A=-e^{\lambda}B$ なので

$$Ae^{-\lambda x}+Be^{\lambda x}=B\left(-e^{\lambda}e^{-\lambda x}+e^{\lambda x}\right)$$

であり, $\lambda\tanh(\frac{\lambda}{2})=-\mu\tan(\frac{\mu}{2})$ ならば, $A=e^{\lambda}B$ であるから

$$Ae^{-\lambda x}+Be^{\lambda x}=B\left(e^{\lambda}e^{-\lambda x}+e^{\lambda x}\right)$$

となる．以上から固有関数の形と固有空間の次元が分かった． □

定理 3-13 から μ の値の変化で $H(U_4)$ の負の固有値は現れたり, 消えたりする．そこでまず固有値全体の逆数和を計算する．

3-15 補題 $\mu > 0, \sin\mu \neq 0, \beta = \dfrac{\tan(\frac{\mu}{2})}{\frac{\mu}{2}} \neq 1$ とする．このとき定理 3-11 より $H(U_4)$ はゼロ固有値をもたない．そこで $H(U_4)$ の逆作用素は次の $k(x,t)$ を積分核とした積分作用素の形で求めることが出来る．

$$H(U_4)^{-1}u(x) = (u(t), k(x,t)),$$

$$k(x,t) = (t-x)H_x(t) + \frac{1}{\beta-1}(xt - x + \frac{\beta}{2}x - \frac{\beta}{2}t + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{\mu^2\beta} + \frac{1}{\mu^2}).$$

3-16 証明 $-v''(x) = u(x)$ を境界条件

$$v'(1) - v'(0) = \frac{2}{\beta}\{v(1) + v(0)\}, \quad v'(1) - v'(0) = -\frac{\mu^2\beta}{2}\{v(1) - v(0)\},$$

の下で解けば良い． □

3-17 定理 $\mu > 0, \sin\mu \neq 0, \beta = \dfrac{\tan(\frac{\mu}{2})}{\frac{\mu}{2}} \neq 1$ とする．このとき $H(U_4)$ はゼロ固有値をもたない．そして $H(U_4)$ の全固有値の逆数和は, 重複度も込めて,

$$\frac{1}{\beta-1}\left(-\frac{1}{6} + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{\mu^2\beta} + \frac{1}{\mu^2}\right)$$

である．

この定理では $H(U_4)$ の固有値 μ^2 の重複度 (固有空間の次元) が 2, その他は 1 なので, $\frac{1}{\mu^2}$ が 2 回足されている．また負の固有値はあったとしても高々 1 個なので, 和は加える順序に依らない．

3-18 証明 $H(U_4)$ は自己共役作用素で, コンパクトリゾルベントを持つ．よって全固有値

の逆数和は, トレースの公式 [(2),(3),(4)] から,

$$\int_0^1 k(x,x)dx = \frac{1}{\beta-1}\int_0^1 (x^2 - x + \frac{\beta}{2}x - \frac{\beta}{2}x + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{\mu^2\beta} + \frac{1}{\mu^2})dx$$

$$= \frac{1}{\beta-1}(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{\mu^2\beta} + \frac{1}{\mu^2}) = \frac{1}{\beta-1}\left(-\frac{1}{6} + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{\mu^2\beta} + \frac{1}{\mu^2}\right)$$

と分かる. □

3-19 定理 $0 < \frac{\mu}{2} < \frac{\pi}{2}$ とする. このとき $x\tan x = \frac{\mu}{2}\tan\frac{\mu}{2}$ の正で小さい方から n 番目の根を $\nu_n\,(n = 1, 2, \cdots)$ とすると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^{-2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\mu\tan(\frac{\mu}{2})}$$

である.

なお $\mu \to +0$ のとき, 和が発散するのは, 前論文 [(1)] でもパラメータに関する不連続性があることが分かっており, 新しい現象ではない.

3-20 証明

$0 < \frac{\mu}{2} < \frac{\pi}{2}$ なので, 定理 3-13 より, $H(U_4)$ は負の固有値はもたない. また $\beta = \frac{\tan(\frac{\mu}{2})}{\frac{\mu}{2}} > 1$ であるから, 定理 3-17 より正の固有値の逆数和が分かり, 定理 3-9 より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\lambda_n^{(1)}\}^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{\lambda_n^{(2)}\}^{-2} + \frac{2}{\mu^2} = \frac{1}{\beta-1}\left(-\frac{1}{6} + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{\mu^2\beta} + \frac{1}{\mu^2}\right)$$

と表すことが出来る. ここで $\lambda = \lambda_n^{(1)}, \mu$ は

$$\lambda^{-1}\tan(\frac{\lambda}{2}) = \mu^{-1}\tan(\frac{\mu}{2})$$

の根であるから,

$$\tan(\frac{\lambda}{2}) = \beta(\frac{\lambda}{2})$$

が成り立つ. $\tan x = \beta x$ の正根の逆 2 乗和は分かっている.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n^{(1)}}{2}\right)^{-2} + (\frac{\mu}{2})^{-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3(\beta-1)} = \frac{1}{\beta-1}\left(\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{6}\right)$$

となる [1]. すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\lambda_n^{(1)}\}^{-2}+\frac{1}{\mu^2}=\frac{1}{4(\beta-1)}\left(\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{6}\right)$$

一方, $\lambda=\lambda_n^{(2)},\mu$ は

$$\lambda\tan(\frac{\lambda}{2})=\mu\tan(\frac{\mu}{2})$$

の根であるから, $\{\nu_n;n=1,2,\cdots\}$ は $\{\frac{\mu}{2},\frac{\lambda_m^{(2)}}{2};m=1,2,\cdots\}$ である. よって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n^{-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n^{(2)}}{2}\right)^{-2}+(\frac{\mu}{2})^{-2}=4\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{(2)}\right)^{-2}+\frac{1}{\mu^2}\right\}$$

$$=4\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{(1)}\right)^{-2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{(2)}\right)^{-2}+\frac{2}{\mu^2}\right\}-4\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{(1)}\right)^{-2}+\frac{1}{\mu^2}\right\}$$

$$=\frac{4}{\beta-1}\left(-\frac{1}{6}+\frac{\beta}{4}-\frac{1}{\mu^2\beta}+\frac{1}{\mu^2}\right)-\frac{4}{\beta-1}\left(\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{4}{\mu^2\beta}=\frac{1}{2}+\frac{2}{\mu\tan(\frac{\mu}{2})}$$

が得られる. □

$\beta=\frac{\tan(\frac{\mu}{2})}{\frac{\mu}{2}}=1$ であるとき, $H(U_4)$ はゼロ固有値をもつ. また負の固有値は高々 1 個 (固有空間の次元 1) もつことがある. そこで負の固有値込みの固有値の逆数和の結果を証明なしで述べておく.

3-21 定理 $\mu>0,\sin\mu\neq 0,\frac{\tan(\frac{\mu}{2})}{\frac{\mu}{2}}=1$ とする. このとき $H(U_4)$ のゼロ固有値を除いた固有値の逆数和は $\frac{1}{5}+\frac{1}{\mu^2}$ である.

4. 固有値 $-\mu^2$ に対応する固有空間の次元が 2 となる $H(U)$

$\mu>0$ を任意に与えたとき, $-\mu^2$ を固有値とし, その固有空間 $\mathrm{Ker}\left(H(U)+\mu^2\right)$ の次元が 2 となる自己共役拡張 $H(U)$ が存在するかどうか調べる. やり方はこれまでと同様で, 状況はこれまでより簡単なので, 証明なしで結果のみ述べる.

4-1 定理 $\mu>0$ とする.

(i) $-\mu^2$ が $H(U)$ の固有値であり, その固有空間の次元が 2 である為の必要十分条件は $U=U_5=PVP$ のときである. ここで

$$V=\begin{pmatrix}\frac{1-\kappa\alpha-i\kappa\alpha}{1-\kappa\alpha+i\kappa\alpha} & 0\\ 0 & \frac{1-\kappa\beta-i\kappa\beta}{1-\kappa\beta+i\kappa\beta}\end{pmatrix},\quad P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},$$

$$\alpha=\frac{1}{2}(e^\pi-1)^2(e^{\frac{\mu}{2}}-e^{-\frac{\mu}{2}})^2,\quad \beta=\frac{1}{2}(e^\pi+1)^2(e^{\frac{\mu}{2}}+e^{-\frac{\mu}{2}})^2,\quad \kappa=\frac{2\pi}{\mu(e^\mu-e^{-\mu})(e^{2\pi}-1)}$$

である.

(ii) $H(U_5)$ の負の固有値は $-\mu^2$ しかない.

(iii) $H(U_5)$ の境界条件は

$$\begin{cases}v'(1)+v'(0)=\frac{\mu}{\tanh(\frac{\mu}{2})}\{v(1)-v(0)\}\\ v'(1)-v'(0)=\mu\tanh(\frac{\mu}{2})\{v(1)+v(0)\}\end{cases}$$

である.

(iii) $H(U_5)$ の正の固有値は μ^2 と $(\lambda_n^{(1)})^2, (\lambda_n^{(2)})^2$ $(n=1,2,\cdots)$ である. ここで $\lambda_n^{(1)}$ は

$$\lambda>0,\quad \lambda^{-1}\tan(\frac{\lambda}{2})=\mu^{-1}\tanh(\frac{\mu}{2})$$

を満たす小さい方から n 番目の根であり, $\lambda_n^{(2)}$ は

$$\lambda>0,\quad \lambda\tan(\frac{\lambda}{2})=-\mu\tanh(\frac{\mu}{2})$$

を満たす小さい方から n 番目の根である. 任意の自然数 m,n に対して $\lambda_m^{(1)}\neq\lambda_n^{(2)}$ となっている. 各固有空間の次元は 1 である.

4-2 定理

$H(U_5)$ はゼロ固有値をもたない.

4-3 定理 $\mu>0$ とする. $H(U_5)$ の正の固有値の逆数和を $S(\mu)$ とすると, $\beta=\frac{\tanh(\frac{\mu}{2})}{\frac{\mu}{2}}$ として,

$$S(\mu)=\frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{\mu^2\beta}+\frac{1}{\mu^2}-\frac{\beta}{4}\right)+\frac{2}{\mu^2},\quad S(+0)=\frac{1}{15},\quad S(\infty)=\frac{1}{6}$$

である.

参考文献

(1) 小林俊公, 島田伸一, 「境界条件から得られる無限和の性質」, 摂南大学融合科学研究所論文集, 第７巻, 第１号 (2021), 45-59.
(2) Eskin, G.,“Lectures on Linear Partial Differential Equations”, American Mathematical Society, (2010).
(3) 宮島静雄,「関数解析」, 横浜図書, (1999).
(4) 溝畑　茂,「積分方程式入門」, 朝倉書店, (1968).
(5) Aubin, T.,“A Course in Differential Geometry”, American Mathematical Society, (2000).
(6) 齋藤直樹,“ラプラシアン固有関数とその画像データ解析への応用”, J.Plasma Fusion Res. Vol.92 No.12 (2016) 904-911.