線分上の運動量作用素とエネルギー作用素から得られる無限和[1]
Infinite sums obtained from momentum and energy operators on a line segment

小林俊公[2]　摂南大学理工学部 基礎理工学機構
島田伸一　摂南大学理工学部 基礎理工学機構

KOBAYASHI, Toshimasa　**Institute for Fundamental Sciences, Faculty of Science and Engineering, Setsunan University**

SHIMADA, Shinichi　**Institute for Fundamental Sciences, Faculty of Science and Engineering, Setsunan University**

Abstract

For an energy operator H, which is any one of selfadjoint extensions of $-(\frac{d}{dx})^2$ on an open interval I, we compute the reciprocal sum of the eigenvalues and examine how the sum depends on the parameters which determine selfadjoint extension. Given a momentum operator P, which is any one of selfadjoint extensions of $-i\frac{d}{dx}$ on I, we find the parameters that satisfy $P^2 = H$ in all possible energy operators.

キーワード：自己共役拡張，境界条件，トレースの公式，運動量作用素，エネルギー作用素

Keywords：selfadjoint extension, boundary condition, trace formula, momentum oparator , energy operator

１．序

非相対論的量子力学のシュレディンガー描像では, 1 次元全空間 $\mathbb{R}$ の運動量には運動量作用素 $P = -i\frac{d}{dx}$ が対応し, エネルギーにはエネルギー作用素 (ハミルトニアン) $H = -(\frac{d}{dx})^2$ が対応するとされる．その数学的定式化においては, これらの作用素は自己

[1]【原稿受付】2023 年 9 月 14 日,【掲載決定】2023 年 10 月 14 日
[2]【主著者連絡先】小林俊公　摂南大学，教授　e-mail：kobayashi@mpg.setsunan.ac.jp
〒572-8508　大阪府寝屋川市池田中町 17-8，摂南大学理工学部 基礎理工学機構

共役であることが要求される．全空間 $\mathbb{R}$ においては, フーリエ変換を利用して, P, H は複素数値無限回微分可能で, コンパクトサポートを持つ関数全体のベクトル空間 $C_0^\infty(\mathbb{R})$ 上で本質的自己共役であることが示される．すなわち $\mathbb{R}$ 上では, 運動量作用素・エネルギー作用素は自己共役作用素としてはそれぞれの閉包をとったもの唯一つしかなく, それらを再び P, H と表すと, $H = P^2$ の関係が得られる．

しかし全空間 $\mathbb{R}$ ではなく, 有限区間 $I = (0, 1)$ で考えると, 状況は一変する．P, H は $C_0^\infty(I)$ 上で本質的自己共役ではなくなり, それぞれ連続無限個の相異なる自己共役拡張が得られる．これは $x = 0, 1$ における境界条件の与え方で, 自己共役作用素が変わってくるからである．そこで $H = P^2$ が成り立つペア (P, H) を特定することが問題となる．我々はこの問題を完全に解くことが出来る (定理 5.1)．一方, ディリクレラプラシアン H(境界条件 $u(0) = u(1) = 0$) は, $H = P^2$ を満たす運動量作用素を持たないことが分かる．我々はこの物理的意味を知らない．

さて運動量作用素 P とエネルギー作用素 H を正確に定義する．まず内積を

$$(u, v) := \int_0^1 u(x)\overline{v(x)}dx$$

とした, I 上の複素数値ルベーグ 2 乗可積分関数全体のヒルベルト空間 $\mathcal{H} := L_2(I)$ をとる．その空間内で I 上の複素数値無限回微分可能で, コンパクトサポートを持つ関数全体のベクトル空間 $C_0^\infty(I)$ を定義域とする $\mathcal{H}$ 上の最小作用素 P_{00}, H_{00}:

$$\mathrm{Dom}(P_{00}) := C_0^\infty(I), \quad P_{00}u(x) := -iu'(x),$$
$$\mathrm{Dom}(H_{00}) := C_0^\infty(I), \quad H_{00}u(x) := -u''(x)$$

の自己共役拡張をそれぞれ P, H とする．P_{00} の自己共役拡張は実パラメータ $\alpha \in [0, 2\pi)$ で次のように特徴付けられることが知られている (Weidmann[(1)], p.240).

(i) P_α の定義域の元 $u(x)$ は, I 上の 1 階のソボレフ空間 [(2),(3)] $W_1(I)$ の元で, 境界条件

$$u(1) = e^{i\alpha}u(0)$$

を満たすものである．ここで境界値はトレースの意味 [(2),(3)] である．

(ii) P_α の作用は,

$$P_\alpha u(x) = -iu'(x)$$

である．微分はシュワルツ超関数の意味 [(2),(3)] でとる．同様に, H_{00} の自己共役拡張全体と 2×2 ユニタリ行列全体 $U(2)$ の間には全単射が存在する．$H = H(U)$ はユニタリ行列 $U \in U(2)$ によって次のように特徴付けされる [(4),(5)].

(i) $H(U)$ の定義域の元 $u(x)$ は, I 上の 2 階のソボレフ空間 (2),(3) $W_2(I)$ の元で, $U \in U(2)$ に対して, 境界条件

$$(U-1)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'(1) \\ u'(0) \end{pmatrix} = \pi(1-i)(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix}$$

を満たすものである. ここで 2×2 単位行列を 1 と表した.

(ii) $H(U)$ の作用は,

$$H(U)u(x) = -u''(x)$$

である.

微分はシュワルツ超関数の意味 (2),(3) でとる.

上に述べたように $H(U)$ はユニタリ行列 U でパラメータ付けされるが, 任意の $U \in U(2)$ は $\alpha, \beta, \theta, u, v, w \in \mathbb{R}$ として,

$$U = P\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix}P^{-1}, \quad P = e^{i\frac{w}{2}}\begin{pmatrix} e^{iu}\cos\theta & e^{iv}\sin\theta \\ -e^{-iv}\sin\theta & e^{-iu}\cos\theta \end{pmatrix}$$

の形に表すことが出来る. $e^{i\alpha}, e^{i\beta}$ は U の固有値である. 我々は $H(U)$ の固有値の逆数和に対して, これらのパラメータがどう影響するのか調べたい. $\alpha, \beta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ の下では,

$$c(\alpha) := \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

とおくとき, $H(U)$ の固有値の逆数和は,

$$c(\alpha)c(\beta), \quad c(\alpha) + c(\beta), \quad \{c(\alpha) - c(\beta)\}\cos(u+v)\sin(2\theta)$$

という量にのみに依存することが分かる (定理 3.5). 証明はトレースの公式を用いる. $H(U)^{-1}$ の積分核を求める作業が必要であるが, 行列の対角化を行いながら進める.

次に, P_α^{-2} にトレースの公式を適用して, よく知られた無限和の公式を出す. $H(U_\alpha) = P_\alpha^2$ なので, $H(U_\alpha)^{-1}$ の積分核を計算するより, P_α^{-1} の積分核から P_α^{-2} のそれを求める方が遥かに簡単であるからである. 同様にして, ディリクレラプラシアン H に対して, H^{-n} の積分核を用いて, ゼータ関数の特殊値 $\zeta(2n)(n \in \mathbb{N})$ の積分表示を与えることが出来る.

2. 一般のユニタリ行列 U に対する $H(U)^{-1}$ の積分核

一般のユニタリ行列 U に対する $H(U)^{-1}$ の積分核を求めよう. もちろん $H(U)$ がゼロ固有値を持てば, $H(U)^{-1}$ は存在しないので, 前論文 (4),(5) で行ったような $H(U)^{-1}$ の類

似物を構成する必要が起こる．今回はこの場合は除く．さらに計算を簡単にするために, このセクションでは

$$(U-1)^{-1}, \quad (U-i)^{-1}$$

が存在すると仮定する．これは U が固有値 $1, i$ を持たないという条件である．U が固有値 $1, 1$ をもつとき $H(U)$ はディリクレラプラシアンであり, 固有値 i, i をもつときには $H(U)$ がノイマンラプラシアンになることが分かっている [4]．

さてユニタリ行列は ユニタリ行列で対角化出来るから, 任意の $U \in U(2)$ は $\alpha, \beta, \theta, u, v, w \in \mathbb{R}$ として,

$$U = P\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P = e^{i\frac{w}{2}}\begin{pmatrix} e^{iu}\cos\theta & e^{iv}\sin\theta \\ -e^{-iv}\sin\theta & e^{-iu}\cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

の形に表すことが出来る．これは $V \in U(2)$ かつ $\det V = 1$ のときは

$$V = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, |a|^2 + |b|^2 = 1, \quad (a, b \in \mathbb{C})$$

と表すことが出来ることを用いれば良い（横田 [6], p.30).

そこで $H(U)u = v$ を解こう．これは超関数の意味で, $-u''(x) = v(x)$ である．$C_0^\infty(I)$ は $\mathcal{H}$ で稠密であるから, $v \in C_0^\infty(I)$ の場合を考えれば良い．このとき u は $C^\infty-$ 関数となるから, 普通に微分積分を行うことができ, トレースの意味の境界値も $x = 0, 1$ を代入すれば良い．　実際に解いて, $u(x)$ は, A, B を定数として

$$u'(x) = -\int_0^x dt v(t) + A,$$

$$u(x) = -\int_0^x dt v(t)(x-t) + Ax + B = -(v, H_x \cdot (x-t)) + Ax + B \tag{2.2}$$

の形である．ここで

$$H_x(t) = \begin{cases} 1 & (0 < t \le x) \\ 0 & (x < t < 1) \end{cases}$$

とした．これより

$$\begin{pmatrix} u'(1) \\ u'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(v,1) + A \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (v,1) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(v,1-t) + A + B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (v,1-t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

が得られる．これらを境界条件

$$(U-1)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'(1) \\ u'(0) \end{pmatrix} = \pi(1-i)(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix}$$

に代入する：

$$\begin{aligned}(U-1)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (v,1) \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ = \pi(1-i)(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (v,1-t) \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.\end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ についての方程式を求める．

$$\begin{aligned}&\left\{\pi(1-i)(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (U-1)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \\ &= \pi(1-i)(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (v,1-t) \\ 0 \end{pmatrix} - (U-1)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (v,1) \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

とし,

$$\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (v,1-t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\pi}\cdot(v,1-t) \\ -(v,1-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\pi} \\ -1 \end{pmatrix}\cdot(v,1-t),$$

$$\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (v,1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\pi}\cdot(v,1) \\ (v,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\pi} \\ 1 \end{pmatrix}\cdot(v,1)$$

に注意して,

$$X\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \pi(1-i)(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} \\ -1 \end{pmatrix}\cdot(v,1-t) - (U-1)\begin{pmatrix} e^{\pi} \\ 1 \end{pmatrix}\cdot(v,1) \tag{2.3}$$

$$X = \pi(1-i)(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (U-1)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

となる．行列 X が正則となる条件を調べる．(2.3) で $v(x)=0$ とすれば, これは $H(U)$ がゼロ固有値を持たない条件でもある．

2-1 補題

$U \in U(2)$ は (2.1) の形とし, $\alpha, \beta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ とする．このとき行列 X が正則であるための必要十分条件は,

$$\Delta := \gamma\cdot c(\alpha)c(\beta) - \{c(\alpha)+c(\beta)\} - \{c(\alpha)-c(\beta)\}\cos(u+v)\sin(2\theta) \neq 0$$

である．ここで

$$c(\alpha) := \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad \gamma := \frac{\sqrt{2}\pi(e^{\pi}-1)}{e^{\pi}+1}$$

とする．またこの条件は $H(U)$ がゼロ固有値を持たない条件でもある．

2-2 証明

(2.4) の両辺に左から $(e^{\pi}+1)^{-1}(U-1)^{-1}$ を掛けて計算する．$\mu = \frac{e^{\pi}}{e^{\pi}+1}$ とおくと，$1-\mu = \frac{1}{e^{\pi}+1}$ であるから，$1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ と表して，

$$\begin{aligned}
&(e^{\pi}+1)^{-1}(U-1)^{-1}X \\
&= \frac{\pi\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{e^{\pi}+1}(U-1)^{-1}(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} & e^{\pi}+1 \\ -1 & -(e^{\pi}+1) \end{pmatrix} - (e^{\pi}+1)^{-1}\begin{pmatrix} e^{\pi}+1 & 0 \\ e^{\pi}+1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \pi\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}(U-1)^{-1}(U-i)\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ \mu-1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる．次に右から $\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ \mu-1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$ を掛ける．

$$1-2\mu = 1 - \frac{2e^{\pi}}{e^{\pi}+1} = \frac{1-e^{\pi}}{e^{\pi}+1} = -\frac{\gamma}{\pi\sqrt{2}}$$

に注意して，

$$\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ \mu-1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{\gamma}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\mu+1 & \mu \end{pmatrix},$$

$$-\frac{\pi\sqrt{2}}{\gamma}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\mu+1 & \mu \end{pmatrix} = \frac{\pi\sqrt{2}}{\gamma}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

より，

$$\begin{aligned}
&(e^{\pi}+1)^{-1}(U-1)^{-1}X\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ \mu-1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \pi\sqrt{2}\left\{e^{-i\frac{\pi}{4}}(U-1)^{-1}(U-i) - \frac{1}{\gamma}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

となる．ここで (2.1) の U の形から

$$(U-1)^{-1}(U-i) = P\begin{pmatrix} \frac{e^{i\alpha}-i}{e^{i\alpha}-1} & 0 \\ 0 & \frac{e^{i\beta}-i}{e^{i\beta}-1} \end{pmatrix}P^{-1},$$

$$\frac{e^{i\alpha}-i}{e^{i\alpha}-1}=\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4})}-e^{-i(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4})}\right)}{e^{i\frac{\alpha}{2}}-e^{-i\frac{\alpha}{2}}}=e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}=e^{i\frac{\pi}{4}}c(\alpha)$$

であるから,

$$(e^{\pi}+1)^{-1}(U-1)^{-1}X\begin{pmatrix}\mu & 1\\ \mu-1 & -1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\pi\sqrt{2}\left\{P\begin{pmatrix}c(\alpha) & 0\\ 0 & c(\beta)\end{pmatrix}P^{-1}-\frac{1}{\gamma}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\} \qquad (2.5)$$

となる．これより, X の正則性は右辺のそれに帰着する．ここで右辺を $\pi\sqrt{2}Y$ とおくと,

$$P\begin{pmatrix}c(\alpha) & 0\\ 0 & c(\beta)\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}e^{iu}\cos\theta & e^{iv}\sin\theta\\ -e^{-iv}\sin\theta & e^{-iu}\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c(\alpha) & 0\\ 0 & c(\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-iu}\cos\theta & -e^{iv}\sin\theta\\ e^{-iv}\sin\theta & e^{iu}\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}e^{iu}\cos\theta & e^{iv}\sin\theta\\ -e^{-iv}\sin\theta & e^{-iu}\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c(\alpha)e^{-iu}\cos\theta & -c(\alpha)e^{iv}\sin\theta\\ c(\beta)e^{-iv}\sin\theta & c(\beta)e^{iu}\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}c(\alpha)\cos^2\theta+c(\beta)\sin^2\theta & -\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{i(u+v)}\cos\theta\sin\theta\\ -\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{-i(u+v)}\cos\theta\sin\theta & c(\alpha)\sin^2\theta+c(\beta)\cos^2\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}c(\alpha)\cos^2\theta+c(\beta)\sin^2\theta & -\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{i(u+v)}\sin(2\theta)\\ -\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{-i(u+v)}\sin(2\theta) & c(\alpha)\sin^2\theta+c(\beta)\cos^2\theta\end{pmatrix} \qquad (2.6)$$

であるから,

$$Y=$$

$$\begin{pmatrix}c(\alpha)\cos^2\theta+c(\beta)\sin^2\theta-\frac{1}{\gamma} & -\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{i(u+v)}\sin(2\theta)-\frac{1}{\gamma}\\ -\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{-i(u+v)}\sin(2\theta)-\frac{1}{\gamma} & c(\alpha)\sin^2\theta+c(\beta)\cos^2\theta-\frac{1}{\gamma}\end{pmatrix} \qquad (2.7)$$

となる．よって行列式を計算すると,

$$\det Y=\left[c(\alpha)\cos^2\theta+c(\beta)\sin^2\theta-\frac{1}{\gamma}\right]\left[c(\alpha)\sin^2\theta+c(\beta)\cos^2\theta-\frac{1}{\gamma}\right]$$

$$-\left[\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{i(u+v)}\sin(2\theta)+\frac{1}{\gamma}\right]\left[\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{-i(u+v)}\sin(2\theta)+\frac{1}{\gamma}\right]$$

$$=[c(\alpha)c(\beta)(\cos^4\theta+\sin^4\theta)+\{c^2(\alpha)+c^2(\beta)\}\cos^2\theta\sin^2\theta]$$

$$-\frac{1}{\gamma}\{c(\alpha)+c(\beta)\}+\frac{1}{\gamma^2}$$

$$-[\frac{1}{4}\{c(\alpha)-c(\beta)\}^2\sin^2(2\theta)+\frac{1}{2\gamma}\{c(\alpha)-c(\beta)\}\{e^{i(u+v)}+e^{-i(u+v)}\}\sin(2\theta)+\frac{1}{\gamma^2}]$$

となる．ここで

$$\cos^4\theta + \sin^4\theta = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - 2\cos^2\theta\sin^2\theta = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2\theta)$$

を代入すれば,

$$\begin{aligned}\det Y = [c(\alpha)c(\beta)(1 - \frac{1}{2}\sin^2(2\theta)) + \{c^2(\alpha) + c^2(\beta)\}\frac{1}{4}\sin^2(2\theta)] \\ -\frac{1}{\gamma}\{c(\alpha) + c(\beta)\} + \frac{1}{\gamma^2} \\ -[\frac{1}{4}\{c(\alpha) - c(\beta)\}^2\sin^2(2\theta) + \frac{1}{\gamma}\{c(\alpha) - c(\beta)\}\cos(u+v)\sin(2\theta) + \frac{1}{\gamma^2}] \\ = c(\alpha)c(\beta) - \frac{1}{\gamma}\{c(\alpha) + c(\beta)\} - \frac{1}{\gamma}\{c(\alpha) - c(\beta)\}\cos(u+v)\sin(2\theta) \\ = \frac{1}{\gamma}[\gamma\cdot c(\alpha)c(\beta) - \{c(\alpha) + c(\beta)\} - \{c(\alpha) - c(\beta)\}\cos(u+v)\sin(2\theta)] \\ = \frac{\Delta}{\gamma} \qquad (2.8)\end{aligned}$$

が得られる． □

以後 X^{-1} が存在する場合を考える．(2.3) より

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \pi(1-i)X^{-1}(U-i)\begin{pmatrix} e^\pi \\ -1 \end{pmatrix}\cdot(v, 1-t) - X^{-1}(U-1)\begin{pmatrix} e^\pi \\ 1 \end{pmatrix}\cdot(v, 1) \qquad (2.9)$$

である．

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} := \pi(1-i)X^{-1}(U-i)\begin{pmatrix} e^\pi \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} := X^{-1}(U-1)\begin{pmatrix} e^\pi \\ 1 \end{pmatrix}$$

を計算する．

2-3 補題

$U \in U(2)$ は (2.1) の形とし, $\alpha, \beta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ とする．X が正則ならば

$$\begin{aligned}E = \frac{1}{\Delta(e^\pi+1)}[\{c(\alpha) + e^\pi c(\beta)\}\cos^2\theta + \{e^\pi c(\alpha) + c(\beta)\}\sin^2\theta \\ +\frac{1}{2}\{c(\alpha) - c(\beta)\}\sin(2\theta)\{e^\pi e^{-i(u+v)} + e^{i(u+v)}\}], \\ F = \frac{-1}{\Delta(e^\pi+1)^2}[\frac{(e^\pi-1)^2}{\gamma} + e^\pi\{c(\alpha) + c(\beta)\}\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}\sin(2\theta)\{e^{i(u+v)}+e^{2\pi}e^{-i(u+v)}\}]$$

である．

2-4 証明

(2.5) より

$$(e^{\pi}+1)^{-1}(U-1)^{-1}X\begin{pmatrix}\mu & 1\\ \mu-1 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\pi\sqrt{2}Y$$

である．$Y=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ とする．

$$(U-1)^{-1}X=\pi\sqrt{2}(e^{\pi}+1)Y\begin{pmatrix}\mu & 1\\ \mu-1 & -1\end{pmatrix}$$

の逆行列をとれば, (2.8) と $1-2\mu=\frac{-\gamma}{\pi\sqrt{2}}$ より

$$X^{-1}(U-1)=\frac{1}{\pi\sqrt{2}(e^{\pi}+1)}\begin{pmatrix}\mu & 1\\ \mu-1 & -1\end{pmatrix}^{-1}Y^{-1}$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{2}(e^{\pi}+1)}\cdot\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{-\gamma}\right)\cdot\frac{\gamma}{\Delta}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -\mu+1 & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

$$=\frac{-1}{\Delta(e^{\pi}+1)}\begin{pmatrix}-d+c & b-a\\ (-\mu+1)d-\mu c & (\mu-1)b+\mu a\end{pmatrix}$$

となる．$\mu=\frac{e^{\pi}}{e^{\pi}+1}$ なので

$$X^{-1}(U-1)\begin{pmatrix}e^{\pi}\\ 1\end{pmatrix}=\frac{-1}{\Delta(e^{\pi}+1)}\begin{pmatrix}-d+c & b-a\\ \frac{1}{e^{\pi}+1}d-\frac{e^{\pi}}{e^{\pi}+1}c & \frac{-1}{e^{\pi}+1}b+\frac{e^{\pi}}{e^{\pi}+1}a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{\pi}\\ 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta(e^{\pi}+1)}\begin{pmatrix}e^{\pi}(d-c)+(a-b)\\ \frac{1}{e^{\pi}+1}\{e^{2\pi}c-e^{\pi}(a+d)+b\}\end{pmatrix}$$

である．よって (2.7) より

$$e^{\pi}(d-c)+(a-b)=e^{\pi}[c(\alpha)\sin^2\theta+c(\beta)\cos^2\theta+\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{-i(u+v)}\sin(2\theta)]$$

$$+c(\alpha)\cos^2\theta+c(\beta)\sin^2\theta+\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{i(u+v)}\sin(2\theta)$$

$$=\{c(\alpha)+e^{\pi}c(\beta)\}\cos^2\theta+\{e^{\pi}c(\alpha)+c(\beta)\}\sin^2\theta$$

$$+\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}\sin(2\theta)\{e^{i(u+v)}+e^{\pi}e^{-i(u+v)}\},$$

$$e^{2\pi}c-e^{\pi}(a+d)+b=-\frac{e^{2\pi}}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{-i(u+v)}\sin(2\theta)-\frac{e^{2\pi}}{\gamma}$$

$$-e^{\pi}\{c(\alpha)+c(\beta)-\frac{2}{\gamma}\}-\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{i(u+v)}\sin(2\theta)-\frac{1}{\gamma}$$

$$=-\frac{(e^{\pi}-1)^2}{\gamma}-e^{\pi}\{c(\alpha)+c(\beta)\}-\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}\sin(2\theta)\{e^{i(u+v)}+e^{2\pi}e^{-i(u+v)}\}$$

であるから, E, F が分かった. □

2-5 補題

$U\in U(2)$ は (2.1) の形とし, $\alpha,\beta\notin 2\pi\mathbb{Z}$ とする．X が正則ならば

$$C=\frac{\gamma}{\Delta}c(\alpha)c(\beta),$$

$$D=\frac{-1}{\Delta(e^{\pi}+1)}[\{e^{\pi}c(\alpha)+c(\beta)\}\cos^2\theta+\{c(\alpha)+e^{\pi}c(\beta)\}\sin^2\theta$$

$$+\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}\sin(2\theta)\{e^{i(u+v)}+e^{\pi}e^{-i(u+v)}\}]$$

である.

2-6 証明

(2.4) の両辺に左から $e^{i\frac{\pi}{4}}(e^{\pi}+1)^{-1}(U-i)^{-1}$ を掛けて計算する.

$$\mu=\frac{e^{\pi}}{e^{\pi}+1},\quad 1-\mu=\frac{1}{e^{\pi}+1},\quad 1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

に注意して,

$$e^{i\frac{\pi}{4}}(e^{\pi}+1)^{-1}(U-i)^{-1}X$$

$$=\pi\sqrt{2}(e^{\pi}+1)^{-1}\begin{pmatrix}e^{\pi} & e^{\pi}+1\\ -1 & -(e^{\pi}+1)\end{pmatrix}-e^{i\frac{\pi}{4}}(e^{\pi}+1)^{-1}(U-i)^{-1}(U-1)\begin{pmatrix}e^{\pi}+1 & 0\\ e^{\pi}+1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\pi\sqrt{2}\begin{pmatrix}\mu & 1\\ \mu-1 & -1\end{pmatrix}-e^{i\frac{\pi}{4}}(U-i)^{-1}(U-1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

となる．ここで U の形 (2.1) を用いると

$$e^{i\frac{\pi}{4}}(U-i)^{-1}(U-1)=P\begin{pmatrix}\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}(e^{i\alpha}-1)}{e^{i\alpha}-i} & 0\\ 0 & \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}(e^{i\beta}-1)}{e^{i\beta}-i}\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}\frac{1}{c(\alpha)} & 0\\ 0 & \frac{1}{c(\beta)}\end{pmatrix}P^{-1}$$

となる．これを上式に代入して

$$e^{i\frac{\pi}{4}}(e^{\pi}+1)^{-1}(U-i)^{-1}X = \pi\sqrt{2}\begin{pmatrix}\mu & 1\\ \mu-1 & -1\end{pmatrix} - P\begin{pmatrix}\frac{1}{c(\alpha)} & 0\\ 0 & \frac{1}{c(\beta)}\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

が得られる．右辺を $Z = \begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$ とする．(2.6) で $c(\alpha), c(\beta)$ を $\frac{1}{c(\alpha)}, \frac{1}{c(\beta)}$ に置き換えて

$$P\begin{pmatrix}\frac{1}{c(\alpha)} & 0\\ 0 & \frac{1}{c(\beta)}\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{\cos^2\theta}{c(\alpha)} + \frac{\sin^2\theta}{c(\beta)} & -\frac{1}{2}\{\frac{1}{c(\alpha)} - \frac{1}{c(\beta)}\}e^{i(u+v)}\sin(2\theta)\\ -\frac{1}{2}\{\frac{1}{c(\alpha)} - \frac{1}{c(\beta)}\}e^{-i(u+v)}\sin(2\theta) & \frac{\sin^2\theta}{c(\alpha)} + \frac{\cos^2\theta}{c(\beta)}\end{pmatrix} \tag{2.10}$$

であるから，

$$P\begin{pmatrix}\frac{1}{c(\alpha)} & 0\\ 0 & \frac{1}{c(\beta)}\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{\cos^2\theta}{c(\alpha)} + \frac{\sin^2\theta}{c(\beta)} - \frac{1}{2}\{\frac{1}{c(\alpha)} - \frac{1}{c(\beta)}\}e^{i(u+v)}\sin(2\theta) & 0\\ \frac{\sin^2\theta}{c(\alpha)} + \frac{\cos^2\theta}{c(\beta)} - \frac{1}{2}\{\frac{1}{c(\alpha)} - \frac{1}{c(\beta)}\}e^{-i(u+v)}\sin(2\theta) & 0\end{pmatrix}$$

となる．これより

$$Z$$

$$= \begin{pmatrix}\pi\sqrt{2}\mu - [\frac{\cos^2\theta}{c(\alpha)} + \frac{\sin^2\theta}{c(\beta)} - \frac{1}{2}\{\frac{1}{c(\alpha)} - \frac{1}{c(\beta)}\}e^{i(u+v)}\sin(2\theta)] & \pi\sqrt{2}\\ \pi\sqrt{2}(\mu-1) - [\frac{\sin^2\theta}{c(\alpha)} + \frac{\cos^2\theta}{c(\beta)} - \frac{1}{2}\{\frac{1}{c(\alpha)} - \frac{1}{c(\beta)}\}e^{-i(u+v)}\sin(2\theta)] & -\pi\sqrt{2}\end{pmatrix} \tag{2.11}$$

となり，Z の行列式が計算出来る．$2\mu - 1 = \frac{\gamma}{\pi\sqrt{2}}$ であることを思い出して，

$$\det Z = -\pi\sqrt{2}\Big(\pi\sqrt{2}\mu - [\frac{\cos^2\theta}{c(\alpha)} + \frac{\sin^2\theta}{c(\beta)} - \frac{1}{2}\{\frac{1}{c(\alpha)} - \frac{1}{c(\beta)}\}e^{i(u+v)}\sin(2\theta)]$$

$$+\pi\sqrt{2}(\mu-1) - [\frac{\sin^2\theta}{c(\alpha)} + \frac{\cos^2\theta}{c(\beta)} - \frac{1}{2}\{\frac{1}{c(\alpha)} - \frac{1}{c(\beta)}\}e^{-i(u+v)}\sin(2\theta)]\Big)$$

$$= -\pi\sqrt{2}\Big(\pi\sqrt{2}(2\mu-1) - [\{\frac{1}{c(\alpha)} + \frac{1}{c(\beta)}\} - \frac{1}{2}\{\frac{1}{c(\alpha)} - \frac{1}{c(\beta)}\}\{e^{i(u+v)} + e^{-i(u+v)}\}\sin(2\theta)]\Big)$$

$$= -\pi\sqrt{2}\Big(\gamma - \{\frac{1}{c(\alpha)} + \frac{1}{c(\beta)}\} + \{\frac{1}{c(\alpha)} - \frac{1}{c(\beta)}\}\cos(u+v)\sin(2\theta)\Big)$$

$$= \frac{-\pi\sqrt{2}}{c(\alpha)c(\beta)}\left(\gamma\cdot c(\alpha)c(\beta) - \{c(\alpha)+c(\beta)\} - \{c(\alpha)-c(\beta)\}\cos(u+v)\sin(2\theta)\right)$$

$$= \frac{-\pi\sqrt{2}\Delta}{c(\alpha)c(\beta)}$$

であることが分かる．そこで

$$e^{i\frac{\pi}{4}}(e^{\pi}+1)^{-1}(U-i)^{-1}X = Z$$

から

$$e^{-i\frac{\pi}{4}}(e^{\pi}+1)X^{-1}(U-i) = Z^{-1}$$

が得られるから，

$$\pi(1-i)X^{-1}(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} \\ -1 \end{pmatrix} = \pi\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}X^{-1}(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \pi\sqrt{2}(e^{\pi}+1)^{-1}Z^{-1}\begin{pmatrix} e^{\pi} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\pi\sqrt{2}}{e^{\pi}+1}\cdot\left(\frac{-c(\alpha)c(\beta)}{\pi\sqrt{2}\Delta}\right)\begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\pi} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{c(\alpha)c(\beta)}{\Delta(e^{\pi}+1)}\begin{pmatrix} -e^{\pi}s-q \\ e^{\pi}r+p \end{pmatrix}$$

となる．よって (2.11) より

$$C = \frac{c(\alpha)c(\beta)}{\Delta(e^{\pi}+1)}(-e^{\pi}s-q) = \frac{c(\alpha)c(\beta)}{\Delta(e^{\pi}+1)}\pi\sqrt{2}(e^{\pi}-1) = \frac{\gamma c(\alpha)c(\beta)}{\Delta}$$

である．また $e^{\pi}(\mu-1)+\mu=0$ に注意して，

$$c(\alpha)c(\beta)(e^{\pi}r+p) = \pi\sqrt{2}e^{\pi}(\mu-1)+\pi\sqrt{2}\mu$$

$$-e^{\pi}[c(\beta)\sin^2\theta + c(\alpha)\cos^2\theta - \frac{1}{2}\{c(\beta)-c(\alpha)\}e^{-i(u+v)}\sin(2\theta)]$$

$$-[c(\beta)\cos^2\theta + c(\alpha)\sin^2\theta - \frac{1}{2}\{c(\beta)-c(\alpha)\}e^{i(u+v)}\sin(2\theta)]$$

$$= -\{e^{\pi}c(\alpha)+c(\beta)\}\cos^2\theta - \{c(\alpha)+e^{\pi}c(\beta)\}\sin^2\theta$$

$$-\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}\sin(2\theta)\{e^{i(u+v)}+e^{\pi}e^{-i(u+v)}\}$$

であるから，D も分かる．　□

これらをまとめると $H(U)^{-1}$ の積分核を求めることが出来る．

2-7　定理

$U \in U(2)$ は (2.1) の形とし, $\alpha, \beta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ とする．X が正則ならば $H(U)^{-1}$ が存在し, その積分核 $k(x,t)$ は

$$k(x,t) = -H_x(t) \cdot (x-t) + C \cdot x(1-t) - Ex + D(1-t) - F$$

である．即ち

$$H(U)^{-1}v(x) = \int_0^1 k(x,t)v(t)dt.$$

ここで C, D, E, F は補題 2.3, 2.5 で与えられたものである．

2-8　証明

$H(U)u = v$ から, (2.2), (2.9) より,

$$u(x) = -(v, H_x \cdot (x-t)) + \{C(v, 1-t) - E(v,1)\}x + D(v, 1-t) - F(v,1)$$

が分かるから,

$$k(x,t) = -H_x(t) \cdot (x-t) + C \cdot x(1-t) - Ex + D(1-t) - F$$

である．　□

３．一般のユニタリ行列 U に対する $H(U)$ の固有値の逆数和

まず, $H(U)$ が正の固有値 λ^2 を持つための λ についての条件を求める．

3-1　補題

$U \in U(2)$ は (2.1) の形とし, $\alpha, \beta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ とする．$\lambda^2 (\lambda > 0)$ が $H(U)$ の正の固有値であるための必要十分条件は,

(i) $\sin\lambda \neq 0$ のとき, λ が方程式

$$c(\alpha)c(\beta) + c_+(\lambda)c_-(\lambda) - \frac{1}{2}\{c(\alpha)+c(\beta)\}\{c_+(\lambda)+c_-(\lambda)\}$$
$$-\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}\{c_+(\lambda)-c_-(\lambda)\}\cos(u+v)\sin(2\theta) = 0$$

を満たすことである．ここで

$$c_+(\lambda) := \frac{\lambda \cdot (e^\pi + 1)^2(\cos\lambda + 1)}{\sqrt{2}\pi(e^{2\pi}-1)\sin\lambda} = \frac{\lambda \cdot (e^\pi+1)\cos(\frac{\lambda}{2})}{\sqrt{2}\pi(e^\pi-1)\sin(\frac{\lambda}{2})},$$

$$c_-(\lambda) := \frac{\lambda \cdot (e^\pi - 1)^2(\cos\lambda - 1)}{\sqrt{2}\pi(e^{2\pi} - 1)\sin\lambda} = \frac{-\lambda \cdot (e^\pi - 1)\sin(\frac{\lambda}{2})}{\sqrt{2}\pi(e^\pi + 1)\cos(\frac{\lambda}{2})}$$

とする.

(ii) $\lambda = 2\pi n (n \in \mathbb{N})$ のとき,

$$c(\alpha) + c(\beta) + \{c(\alpha) + c(\beta)\}\cos(u+v)\sin(2\theta) = 0$$

が成り立つことである. このとき, λ^2 に対応する固有空間は

$$\cos(\lambda x) + \frac{\pi\sqrt{2}}{\lambda}[c(\alpha)\cos^2\theta + c(\beta)\sin^2\theta - \frac{1}{2}\{c(\alpha) - c(\beta)\}e^{i(u+v)}\sin(2\theta)]\sin(\lambda x)$$

で張られる. このとき, λ^2 に対応する固有空間は

$$\cos(\lambda x) + \frac{\pi\sqrt{2}}{\lambda}[c(\alpha)\cos^2\theta + c(\beta)\sin^2\theta + \frac{1}{2}\{c(\alpha) - c(\beta)\}e^{i(u+v)}\sin(2\theta)]\sin(\lambda x)$$

で張られる.

(iii) $\lambda = \pi(2n-1) (n \in \mathbb{N})$ のとき,

$$c(\alpha) + c(\beta) - \{c(\alpha) - c(\beta)\}\cos(u+v)\sin(2\theta) = 0$$

が成り立つことである. このとき, λ^2 に対応する固有空間は

$$\cos(\lambda x) + \frac{\pi\sqrt{2}}{\lambda}[c(\alpha)\cos^2\theta + c(\beta)\sin^2\theta - \frac{1}{2}\{c(\alpha) - c(\beta)\}e^{i(u+v)}\sin(2\theta)]\sin(\lambda x)$$

で張られる.

3-2 証明

$H(U)u = \lambda^2 u$ を解く. $-u''(x) = \lambda^2 u(x)$ であるから, A, B を定数として

$$u(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$$

の形である. これより

$$\begin{pmatrix} u'(1) \\ u'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A\lambda\sin\lambda + B\lambda\cos\lambda \\ B\lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\cos\lambda + B\sin\lambda \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

を境界条件

$$(U-1)\begin{pmatrix} e^\pi & 1 \\ 1 & e^\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'(1) \\ u'(0) \end{pmatrix} = \pi(1-i)(U-i)\begin{pmatrix} e^\pi & 1 \\ -1 & -e^\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix}$$

に代入する.

$$(U-1)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix}\lambda\begin{pmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$=\pi\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},$$

$$\frac{\lambda e^{i\frac{\pi}{4}}}{\pi\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$=(U-1)^{-1}(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

となる.

まず, $\sin\lambda\neq 0$ の場合を考える.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

とおく. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ は全単射で写り合う.

$$\frac{\lambda e^{i\frac{\pi}{4}}}{\pi\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$=\frac{\lambda e^{i\frac{\pi}{4}}}{\pi\sqrt{2}\sin\lambda(e^{2\pi}-1)}\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sin\lambda \\ -1 & \cos\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{\pi} & -1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$=\frac{\lambda e^{i\frac{\pi}{4}}}{\pi\sqrt{2}\sin\lambda(e^{2\pi}-1)}\begin{pmatrix} 2e^{\pi}+(e^{2\pi}+1)\cos\lambda & (e^{2\pi}+1)+2e^{\pi}\cos\lambda \\ (e^{2\pi}+1)+2e^{\pi}\cos\lambda & 2e^{\pi}+(e^{2\pi}+1)\cos\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であり,

$$(U-1)^{-1}(U-i)=e^{i\frac{\pi}{4}}P\begin{pmatrix} c(\alpha) & 0 \\ 0 & c(\beta) \end{pmatrix}P^{-1}$$

であるから, λ^2 が固有値となる λ についての条件は,

$$\frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}\sin\lambda(e^{2\pi}-1)}S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} c(\alpha) & 0 \\ 0 & c(\beta) \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$S:=\begin{pmatrix} 2e^{\pi}+(e^{2\pi}+1)\cos\lambda & (e^{2\pi}+1)+2e^{\pi}\cos\lambda \\ (e^{2\pi}+1)+2e^{\pi}\cos\lambda & 2e^{\pi}+(e^{2\pi}+1)\cos\lambda \end{pmatrix}$$

を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が存在することである．さらに行列 S は

$$Q := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = Q^{-1}$$

で対角化出来ることに注意する．

$$QSQ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{\pi} + (e^{2\pi}+1)\cos\lambda & (e^{2\pi}+1) + 2e^{\pi}\cos\lambda \\ (e^{2\pi}+1) + 2e^{\pi}\cos\lambda & 2e^{\pi} + (e^{2\pi}+1)\cos\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (e^{\pi}+1)^2 + (e^{\pi}+1)^2\cos\lambda & -(e^{\pi}-1)^2 + (e^{\pi}-1)^2\cos\lambda \\ (e^{\pi}+1)^2 + (e^{\pi}+1)^2\cos\lambda & (e^{\pi}-1)^2 - (e^{\pi}-1)^2\cos\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (e^{\pi}+1)^2(\cos\lambda+1) & 0 \\ 0 & (e^{\pi}-1)^2(\cos\lambda-1) \end{pmatrix}$$

である．そこで $Q^2 = 1$(単位行列）であることに注意して

$$\frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}\sin\lambda(e^{2\pi}-1)} S = \frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}\sin\lambda(e^{2\pi}-1)} Q \cdot QSQ \cdot Q$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}\sin\lambda(e^{2\pi}-1)} Q \cdot \begin{pmatrix} (e^{\pi}+1)^2(\cos\lambda+1) & 0 \\ 0 & (e^{\pi}-1)^2(\cos\lambda-1) \end{pmatrix} \cdot Q$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_+(\lambda) & 0 \\ 0 & c_-(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_+(\lambda) & c_+(\lambda) \\ c_-(\lambda) & -c_-(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\{c_+(\lambda) + c_-(\lambda)\} & \frac{1}{2}\{c_+(\lambda) - c_-(\lambda)\} \\ \frac{1}{2}\{c_+(\lambda) - c_-(\lambda)\} & \frac{1}{2}\{c_+(\lambda) + c_-(\lambda)\} \end{pmatrix}$$

となる．よって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が存在するには, $p = \frac{1}{2}\{c_+(\lambda) + c_-(\lambda)\}, q = \frac{1}{2}\{c_+(\lambda) - c_-(\lambda)\}$ として, (2.6) より

$$\det\left(P \begin{pmatrix} c(\alpha) & 0 \\ 0 & c(\beta) \end{pmatrix} P^{-1} - \frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}\sin\lambda(e^{2\pi}-1)} S\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} c(\alpha)\cos^2\theta + c(\beta)\sin^2\theta - p & -\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{i(u+v)}\sin(2\theta) - q \\ -\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{-i(u+v)}\sin(2\theta) - q & c(\alpha)\sin^2\theta + c(\beta)\cos^2\theta - p \end{pmatrix}$$

$$= \{c(\alpha)\cos^2\theta + c(\beta)\sin^2\theta - p\}\{c(\alpha)\sin^2\theta + c(\beta)\cos^2\theta - p\}$$

$$-[\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{i(u+v)}\sin(2\theta) + q][-\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{-i(u+v)}\sin(2\theta) + q]$$

$$= \{c(\alpha)^2 + c(\beta)^2\}\cos^2\theta\sin^2\theta + c(\alpha)c(\beta)\{\cos^4\theta + \sin^4\theta\} - p\{c(\alpha)+c(\beta)\} + p^2$$
$$-\frac{1}{4}\{c(\alpha)-c(\beta)\}^2\sin^2(2\theta) - q\{c(\alpha)-c(\beta)\}\cos(u+v)\sin(2\theta) - q^2 = 0$$

であれば良い.

$$\cos^2\theta\sin^2\theta = \frac{1}{4}\sin^2(2\theta), \quad \cos^4\theta + \sin^4\theta = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2\theta), \quad p^2 - q^2 = c_+(\lambda)c_-(\lambda)$$

を代入すると, (i) の条件となる.

次に $\lambda = 2\pi n$ の場合を考える. (3.1) は

$$\frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^\pi & 1 \\ 1 & e^\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} c(\alpha) & 0 \\ 0 & c(\beta) \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} e^\pi & 1 \\ -1 & -e^\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},$$
$$\frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (e^\pi+1)B \\ (e^\pi+1)B \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} c(\alpha) & 0 \\ 0 & c(\beta) \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} (e^\pi+1)A \\ -(e^\pi+1)A \end{pmatrix},$$
$$\frac{\lambda B}{\pi\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= A\begin{pmatrix} c(\alpha)\cos^2\theta + c(\beta)\sin^2\theta & -\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{i(u+v)}\sin(2\theta) \\ -\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{-i(u+v)}\sin(2\theta) & c(\alpha)\sin^2\theta + c(\beta)\cos^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$= A\begin{pmatrix} c(\alpha)\cos^2\theta + c(\beta)\sin^2\theta + \frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{i(u+v)}\sin(2\theta) \\ -c(\alpha)\sin^2\theta - c(\beta)\cos^2\theta - \frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{-i(u+v)}\sin(2\theta) \end{pmatrix}$$

となる. これより

$$0 = A[c(\alpha) + c(\beta) + \{c(\alpha)-c(\beta)\}\cos(u+v)\sin(2\theta)]$$

が得られる. $c(\alpha) + c(\beta) + \{c(\alpha)-c(\beta)\}\cos(u+v)\sin(2\theta) \neq 0$ ならば $A = B = 0$ となるので

$$c(\alpha) + c(\beta) + \{c(\alpha)-c(\beta)\}\cos(u+v)\sin(2\theta) = 0$$

でなければならない. 逆にこのとき,

$$\frac{\lambda B}{\pi\sqrt{2}} = A\{c(\alpha)\cos^2\theta + c(\beta)\sin^2\theta + \frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{i(u+v)}\sin(2\theta)\}$$
$$= A\{-c(\alpha)\sin^2\theta - c(\beta)\cos^2\theta - \frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{-i(u+v)}\sin(2\theta)\}$$

なので, A から B が定まる. (ii) が示された.

$\lambda=\pi(2n-1)$ の場合, (3.1) は

$$\frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{\pi} & 1\\ 1 & e^{\pi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}c(\alpha) & 0\\ 0 & c(\beta)\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}e^{\pi} & 1\\ -1 & -e^{\pi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix},$$

$$\frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-(e^{\pi}-1)B\\ (e^{\pi}-1)B\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}c(\alpha) & 0\\ 0 & c(\beta)\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}-(e^{\pi}-1)A\\ -(e^{\pi}-1)A\end{pmatrix},$$

$$\frac{\lambda B}{\pi\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$=A\begin{pmatrix}c(\alpha)\cos^2\theta+c(\beta)\sin^2\theta & -\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{i(u+v)}\sin(2\theta)\\ -\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{-i(u+v)}\sin(2\theta) & c(\alpha)\sin^2\theta+c(\beta)\cos^2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$=A\begin{pmatrix}-c(\alpha)\cos^2\theta-c(\beta)\sin^2\theta+\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{i(u+v)}\sin(2\theta)\\ -c(\alpha)\sin^2\theta-c(\beta)\cos^2\theta+\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{-i(u+v)}\sin(2\theta)\end{pmatrix}$$

となる. これより

$$0=A[-c(\alpha)-c(\beta)+\{c(\alpha)-c(\beta)\}\cos(u+v)\sin(2\theta)]$$

が得られる. $-c(\alpha)-c(\beta)+\{c(\alpha)-c(\beta)\}\cos(u+v)\sin(2\theta)\neq 0$ ならば $A=B=0$ となるので

$$-c(\alpha)-c(\beta)+\{c(\alpha)-c(\beta)\}\cos(u+v)\sin(2\theta)=0$$

でなければならない. 逆にこのとき,

$$\frac{\lambda B}{\pi\sqrt{2}}=A\{c(\alpha)\cos^2\theta+c(\beta)\sin^2\theta-\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{i(u+v)}\sin(2\theta)\}$$

$$=A\{-c(\alpha)\sin^2\theta-c(\beta)\cos^2\theta+\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{-i(u+v)}\sin(2\theta)\}$$

なので, A から B が定まる. よって (iii) が示された. □

次に, $H(U)$ が負の固有値を持つための条件を求めよう.

3-3 補題

$U\in U(2)$ は (2.1) の形とし, $\alpha,\beta\notin 2\pi\mathbb{Z}$ とする. $-\lambda^2(\lambda>0)$ が $H(U)$ の負の固有値であるための必要十分条件は,

λ が方程式

$$c(\alpha)c(\beta) + d_+(\lambda)d_-(\lambda) - \frac{1}{2}\{c(\alpha)+c(\beta)\}\{d_+(\lambda)+d_-(\lambda)\}$$

$$-\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}\{d_+(\lambda)-d_-(\lambda)\}\cos(u+v)\sin(2\theta) = 0$$

を満たすことである．ここで

$$d_+(\lambda) := \frac{\lambda\cdot(e^{\pi}+1)^2(e^{\frac{\lambda}{2}}+e^{-\frac{\lambda}{2}})^2}{\sqrt{2}\pi(e^{2\pi}-1)(e^{\lambda}-e^{-\lambda})} = \frac{\lambda\cdot(e^{\pi}+1)(e^{\frac{\lambda}{2}}+e^{-\frac{\lambda}{2}})}{\sqrt{2}\pi(e^{\pi}-1)(e^{\frac{\lambda}{2}}-e^{-\frac{\lambda}{2}})},$$

$$d_-(\lambda) := \frac{\lambda\cdot(e^{\pi}-1)^2(e^{\frac{\lambda}{2}}-e^{-\frac{\lambda}{2}})^2}{\sqrt{2}\pi(e^{2\pi}-1)(e^{\lambda}-e^{-\lambda})} = \frac{\lambda\cdot(e^{\pi}-1)(e^{\frac{\lambda}{2}}-e^{-\frac{\lambda}{2}})}{\sqrt{2}\pi(e^{\pi}+1)(e^{\frac{\lambda}{2}}+e^{-\frac{\lambda}{2}})}$$

とする．

3-4 証明

$H(U)u = -\lambda^2 u\,(\lambda > 0)$ を解く．$-u''(x) = -\lambda^2 u(x)$ であるから，A, B を定数として

$$u(x) = Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x}$$

の形である．これより

$$\begin{pmatrix} u'(1) \\ u'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A\lambda e^{-\lambda} + B\lambda e^{\lambda} \\ -A\lambda + B\lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -e^{-\lambda} & e^{\lambda} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ae^{-\lambda} + Be^{\lambda} \\ A+B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\lambda} & e^{\lambda} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

を境界条件

$$(U-1)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'(1) \\ u'(0) \end{pmatrix} = \pi(1-i)(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix}$$

に代入する．

$$(U-1)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix}\lambda\begin{pmatrix} -e^{-\lambda} & e^{\lambda} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$= \pi\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\lambda} & e^{\lambda} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},$$

$$\frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{-\lambda} & e^{\lambda} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{4}}(U-1)^{-1}(U-i)\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\lambda} & e^{\lambda} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

となる.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ -1 & -e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\lambda} & e^{\lambda} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

とおく. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ は全単射で写り合う.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \frac{1}{(e^{2\pi}-1)(e^{\lambda}-e^{-\lambda})}\begin{pmatrix} 1 & -e^{\lambda} \\ -1 & e^{-\lambda} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{\pi} & -1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(e^{2\pi}-1)(e^{\lambda}-e^{-\lambda})}\begin{pmatrix} -e^{\pi}-e^{\lambda} & -1-e^{\pi}e^{\lambda} \\ e^{\pi}+e^{-\lambda} & 1+e^{\pi}e^{-\lambda} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

であるから,

$$\frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{\pi} & 1 \\ 1 & e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{-\lambda} & e^{\lambda} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)(e^{\lambda}-e^{-\lambda})}\begin{pmatrix} -e^{\pi}e^{-\lambda}-1 & e^{\pi}e^{\lambda}+1 \\ -e^{-\lambda}-e^{\pi} & e^{\lambda}+e^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{\pi}-e^{\lambda} & -1-e^{\pi}e^{\lambda} \\ e^{\pi}+e^{-\lambda} & 1+e^{\pi}e^{-\lambda} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)(e^{\lambda}-e^{-\lambda})}\begin{pmatrix} 4e^{\pi}+(e^{2\pi}+1)(e^{\lambda}+e^{-\lambda}) & 2(e^{2\pi}+1)+2e^{\pi}(e^{\lambda}+e^{-\lambda}) \\ 2(e^{2\pi}+1)+2e^{\pi}(e^{\lambda}+e^{-\lambda}) & 4e^{\pi}+(e^{2\pi}+1)(e^{\lambda}+e^{-\lambda}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である.

$$e^{-i\frac{\pi}{4}}(U-1)^{-1}(U-i) = P\begin{pmatrix} c(\alpha) & 0 \\ 0 & c(\beta) \end{pmatrix}P^{-1}$$

であるから, $-\lambda^2$ が固有値となる λ についての条件は,

$$\frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)(e^{\lambda}-e^{-\lambda})}T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} c(\alpha) & 0 \\ 0 & c(\beta) \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$T := \begin{pmatrix} 4e^{\pi}+(e^{2\pi}+1)(e^{\lambda}+e^{-\lambda}) & 2(e^{2\pi}+1)+2e^{\pi}(e^{\lambda}+e^{-\lambda}) \\ 2(e^{2\pi}+1)+2e^{\pi}(e^{\lambda}+e^{-\lambda}) & 4e^{\pi}+(e^{2\pi}+1)(e^{\lambda}+e^{-\lambda}) \end{pmatrix}$$

を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が存在することである. さらに行列 T は

$$Q := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = Q^{-1}$$

で対角化出来ることに注意する．

$$QTQ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix}4e^{\pi}+(e^{2\pi}+1)(e^{\lambda}+e^{-\lambda}) & 2(e^{2\pi}+1)+2e^{\pi}(e^{\lambda}+e^{-\lambda})\\ 2(e^{2\pi}+1)+2e^{\pi}(e^{\lambda}+e^{-\lambda}) & 4e^{\pi}+(e^{2\pi}+1)(e^{\lambda}+e^{-\lambda})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2(e^{\pi}+1)^2+(e^{\pi}+1)^2(e^{\lambda}+e^{-\lambda}) & -2(e^{\pi}-1)^2+(e^{\pi}-1)^2(e^{\lambda}+e^{-\lambda})\\ 2(e^{\pi}+1)^2+(e^{\pi}+1)^2(e^{\lambda}+e^{-\lambda}) & 2(e^{\pi}-1)^2-(e^{\pi}-1)^2(e^{\lambda}+e^{-\lambda})\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}(e^{\pi}+1)^2(e^{\frac{\lambda}{2}}+e^{-\frac{\lambda}{2}})^2 & 0\\ 0 & (e^{\pi}-1)^2(e^{\frac{\lambda}{2}}-e^{-\frac{\lambda}{2}})^2\end{pmatrix}$$

である．そこで $Q^2 = 1$(単位行列）であることに注意して

$$\frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)(e^{\lambda}-e^{-\lambda})}T = \frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)(e^{\lambda}-e^{-\lambda})}Q\cdot QTQ\cdot Q$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)(e^{\lambda}-e^{-\lambda})}Q\begin{pmatrix}(e^{\pi}+1)^2(e^{\frac{\lambda}{2}}+e^{-\frac{\lambda}{2}})^2 & 0\\ 0 & (e^{\pi}-1)^2(e^{\frac{\lambda}{2}}-e^{-\frac{\lambda}{2}})^2\end{pmatrix}Q$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_+(\lambda) & 0\\ 0 & d_-(\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_+(\lambda) & d_+(\lambda)\\ d_-(\lambda) & -d_-(\lambda)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\{d_+(\lambda)+d_-(\lambda)\} & \frac{1}{2}\{d_+(\lambda)-d_-(\lambda)\}\\ \frac{1}{2}\{d_+(\lambda)-d_-(\lambda)\} & \frac{1}{2}\{d_+(\lambda)+d_-(\lambda)\}\end{pmatrix}$$

となる．よって $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ が存在するには, $p = \frac{1}{2}\{d_+(\lambda)+d_-(\lambda)\}, q = \frac{1}{2}\{d_+(\lambda) - d_-(\lambda)\}$ として, (2.6) より

$$\det\left(P\begin{pmatrix}c(\alpha) & 0\\ 0 & c(\beta)\end{pmatrix}P^{-1} - \frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)(e^{\lambda}-e^{-\lambda})}T\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix}c(\alpha)\cos^2\theta + c(\beta)\sin^2\theta - p & -\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{i(u+v)}\sin(2\theta) - q\\ -\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{-i(u+v)}\sin(2\theta) - q & c(\alpha)\sin^2\theta + c(\beta)\cos^2\theta - p\end{pmatrix}$$

$$= \{c(\alpha)\cos^2\theta + c(\beta)\sin^2\theta - p\}\{c(\alpha)\sin^2\theta + c(\beta)\cos^2\theta - p\}$$

$$-[\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{i(u+v)}\sin(2\theta)+q][-\frac{1}{2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}e^{-i(u+v)}\sin(2\theta)+q]$$

$$= \{c(\alpha)^2 + c(\beta)^2\}\cos^2\theta\sin^2\theta + c(\alpha)c(\beta)\{\cos^4\theta + \sin^4\theta\} - p\{c(\alpha)+c(\beta)\} + p^2$$

$$-\frac{1}{4}\{c(\alpha)-c(\beta)\}^2\sin^2(2\theta)-q\{c(\alpha)-c(\beta)\}\cos(u+v)\sin(2\theta)-q^2=0$$

であれば良い.

$$\cos^2\theta\sin^2\theta=\frac{1}{4}\sin^2(2\theta),\quad \cos^4\theta+\sin^4\theta=1-\frac{1}{2}\sin^2(2\theta),\quad p^2-q^2=d_+(\lambda)d_-(\lambda)$$

を代入すると, 求める条件となる. □

それでは, トレースの公式を用いて, $H(U)$ の固有値の逆数和を求めよう.

3-5 定理

$U\in U(2)$ は (2.1) の形とし, $\alpha,\beta\notin 2\pi\mathbb{Z}$ とする. $H(U)$ がゼロ固有値をもたないとき, $H(U)$ の固有値の逆数和は, 重複度も込めて,

$$\frac{\gamma}{6\Delta}c(\alpha)c(\beta)-\frac{1}{2\Delta}\{c(\alpha)+c(\beta)\}+\frac{\gamma}{2\Delta\pi^2}$$
$$+\frac{e^\pi}{\Delta(e^\pi+1)^2}[\{c(\alpha)+c(\beta)\}-\{c(\alpha)-c(\beta)\}\cos(u+v)\sin(2\theta)]$$

である.

3-6 証明

定理 2.7 とトレースの公式 (2),(7) より, $H(U)$ の固有値の逆数和は

$$\int_0^1 k(x,x)dx=\int_0^1\{C(x-x^2)-Ex+D(1-x)-F\}dx=\frac{1}{6}C+\frac{1}{2}(D-E)-F \qquad (3.2)$$

である. 補題 2.3, 2.5 を用いると,

$$\frac{1}{2}(D-E)$$
$$=\frac{-1}{2\Delta(e^\pi+1)}[\{c(\alpha)+c(\beta)\}(e^\pi+1)+\{c(\alpha)-c(\beta)\}\sin(2\theta)\{e^{i(u+v)}+e^\pi e^{-i(u+v)}\}]$$
$$=\frac{-1}{2\Delta}[\{c(\alpha)+c(\beta)\}-\frac{1}{2\Delta(e^\pi+1)}\{c(\alpha)-c(\beta)\}\sin(2\theta)\{e^{i(u+v)}+e^\pi e^{-i(u+v)}\}$$

であるから,

$$\frac{1}{6}C+\frac{1}{2}(D-E)-F$$
$$=\frac{\gamma}{6\Delta}c(\alpha)c(\beta)-\frac{1}{2\Delta}\{c(\alpha)+c(\beta)\}$$

$$-\frac{1}{2\Delta(e^\pi+1)}\{c(\alpha)-c(\beta)\}\sin(2\theta)\{e^{i(u+v)}+e^\pi e^{-i(u+v)}\}$$

$$+\frac{1}{\Delta(e^\pi+1)^2}\cdot\frac{(e^\pi-1)^2}{\gamma}+\frac{e^\pi\{c(\alpha)+c(\beta)\}}{\Delta(e^\pi+1)^2}$$

$$+\frac{1}{2\Delta(e^\pi+1)^2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}\sin(2\theta)\{e^{i(u+v)}+e^{2\pi}e^{-i(u+v)}\}]$$

$$=\frac{\gamma}{6\Delta}c(\alpha)c(\beta)-\frac{1}{2\Delta}\{c(\alpha)+c(\beta)\}+\frac{(e^\pi-1)^2}{\gamma\Delta(e^\pi+1)^2}+\frac{e^\pi\{c(\alpha)+c(\beta)\}}{\Delta(e^\pi+1)^2}$$

$$-\frac{1}{2\Delta(e^\pi+1)^2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}\sin(2\theta)\{(e^\pi+1)e^{i(u+v)}+(e^\pi+1)e^\pi e^{-i(u+v)}\}$$

$$-\frac{1}{2\Delta(e^\pi+1)^2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}\sin(2\theta)\{-e^{i(u+v)}-e^{2\pi}e^{-i(u+v)}\}]$$

$$=\frac{\gamma}{6\Delta}c(\alpha)c(\beta)-\frac{1}{2\Delta}\{c(\alpha)+c(\beta)\}+\frac{(e^\pi-1)^2}{\gamma\Delta(e^\pi+1)^2}+\frac{e^\pi\{c(\alpha)+c(\beta)\}}{\Delta(e^\pi+1)^2}$$

$$-\frac{e^\pi}{2\Delta(e^\pi+1)^2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}\sin(2\theta)\{e^{i(u+v)}+e^{-i(u+v)}\}$$

$$=\frac{\gamma}{6\Delta}c(\alpha)c(\beta)-\frac{1}{2\Delta}\{c(\alpha)+c(\beta)\}+\frac{(e^\pi-1)^2}{\gamma\Delta(e^\pi+1)^2}+\frac{e^\pi\{c(\alpha)+c(\beta)\}}{\Delta(e^\pi+1)^2}$$

$$-\frac{e^\pi}{\Delta(e^\pi+1)^2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}\sin(2\theta)\cos(u+v)$$

となる．さらに $\gamma=\frac{\pi\sqrt{2}(e^\pi-1)}{e^\pi+1}$ なので

$$\frac{(e^\pi-1)^2}{\gamma\Delta(e^\pi+1)^2}=\frac{1}{\Delta\gamma}\cdot\frac{\gamma^2}{2\pi^2}=\frac{\gamma}{2\Delta\pi^2}$$

に注意すれば,

$$\frac{1}{6}C+\frac{1}{2}(D-E)-F$$

$$=\frac{\gamma}{6\Delta}c(\alpha)c(\beta)-\frac{1}{2\Delta}\{c(\alpha)+c(\beta)\}+\frac{\gamma}{2\Delta\pi^2}+\frac{e^\pi\{c(\alpha)+c(\beta)\}}{\Delta(e^\pi+1)^2}$$

$$-\frac{e^\pi}{\Delta(e^\pi+1)^2}\{c(\alpha)-c(\beta)\}\sin(2\theta)\cos(u+v)$$

となる．□

4．ユニタリ行列 U が固有値 $1, i$ をもつときの $H(U)$ のスペクトルの性質

ユニタリ行列 U が固有値 $1, i$ をもつとき, $H(U)$ のスペクトルがどうなるか述べておく．固有値の逆数和に関しては, 前論文 [(4),(5)] で述べたように, パラメータに関する連続性は一般には成り立っていないことには注意すべきである．経験によれば, 正の固有値がゼロ固有値に変化するときは連続性は保たれるが, 負の固有値がゼロ固有値に変化するときには不連続が起こる．$\theta, u, v, w \in \mathbb{R}$ として,

$$U = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P = e^{i\frac{w}{2}} \begin{pmatrix} e^{iu}\cos\theta & e^{iv}\sin\theta \\ -e^{-iv}\sin\theta & e^{-iu}\cos\theta \end{pmatrix}$$

とする．このとき $H(U)$ の定義域の元 u が満たすべき境界条件は,

$$\begin{cases} \{e^{iu}\cos\theta + e^{\pi}e^{-iv}\sin\theta\}u'(1) + \{e^{\pi}e^{iu}\cos\theta + e^{-iv}\sin\theta\}u'(0) = 0, \\ \{e^{\pi}e^{-iu}\cos\theta + e^{iv}\sin\theta\}u(1) + \{e^{-iu}\cos\theta + e^{\pi}e^{iv}\sin\theta\}u(0) = 0 \end{cases}$$

である．$H(U)$ がゼロ固有値をもつための必要十分条件は,

$$1 + \cos(u+v)\sin(2\theta) = 0$$

が成り立つことである．また $H(U)$ は負の固有値をもたない．$\lambda^2 (\lambda > 0)$ が $H(U)$ の正の固有値であるための必要十分条件は, λ が

$$\cos\lambda = \frac{-\{2e^{\pi} + (e^{\pi}+1)\cos(u+v)\sin(2\theta)\}}{e^{2\pi} + 1 + 2e^{\pi}\cos(u+v)\sin(2\theta)}$$

を満たすことである．そして $H(U)$ がゼロ固有値をもたないとき, $H(U)$ の正の固有値の逆数和は,

$$\frac{e^{2\pi} + 1 + 2e^{\pi}\cos(u+v)\sin(2\theta)}{2\{1 + \cos(u+v)\sin(2\theta)\}}$$

である．これらの結果を出すには, 境界条件において $u'(1), u'(0)$ と $u(1), u(0)$ が分離しているので, 計算は少し簡単になる．

5．$P_\alpha^2 = H(U_\alpha)$ を満たすユニタリ行列 U_α の決定と P_α から得られる無限和

運動量作用素 P_α の 2 乗はエネルギー作用素 $H(U_\alpha)$ になる．そのエネルギー作用素を決定するユニタリ行列 U_α を特定しよう．

5-1　定理

運動量作用素 P_α に対して, $P_\alpha^2 = H(U_\alpha)$ を満たすユニタリ行列は,

$$U_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{e^{\pi}e^{i\alpha}+1}{e^{\pi}+e^{i\alpha}} \\ \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{e^{\pi}+e^{i\alpha}}{e^{\pi}e^{i\alpha}+1} & \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

である．

5-2　証明

$u \in \mathrm{Dom}(P_\alpha^2)$ は $u \in \mathrm{Dom}(P_\alpha)$ かつ $P_\alpha u \in \mathrm{Dom}(P_\alpha)$ であるから,

$$u \in W_2(I), \quad u(1) = e^{i\alpha}u(0), \quad u'(1) = e^{i\alpha}u'(0),$$

を意味する．そこで 3 次関数 $u(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が上の条件を満たすように a, b, c, d を決める．まず任意の a, b, c, d に対して, $u \in W_2(I)$ となることは明らか．また境界条件は

$$\begin{cases} a + b + c + d = e^{i\alpha}d \\ 3a + 2b + c = e^{i\alpha}c \end{cases}$$

から,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c + (e^{i\alpha} - 1)d \\ (e^{i\alpha} - 1)c \end{pmatrix}$$

と変形して,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c + (e^{i\alpha} - 1)d \\ (e^{i\alpha} - 1)c \end{pmatrix}$$

と解くことが出来る．$u(0) = d, u'(0) = c$ の値は任意に与えることが出来る．この u はある $H(U)$ の定義域の元なので, 境界条件

$$(U - 1) \begin{pmatrix} e^\pi & 1 \\ 1 & e^\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(1) \\ u'(0) \end{pmatrix} = \pi(1 - i)(U - i) \begin{pmatrix} e^\pi & 1 \\ -1 & -e^\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix}$$

を満たしている．$u'(1) = e^{i\alpha}u'(0) = e^{i\alpha}c, u(1) = e^{i\alpha}u(0) = e^{i\alpha}d$ を代入して

$$(U - 1) \begin{pmatrix} e^\pi & 1 \\ 1 & e^\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha}c \\ c \end{pmatrix} = \pi(1 - i)(U - i) \begin{pmatrix} e^\pi & 1 \\ -1 & -e^\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha}d \\ d \end{pmatrix}$$

となる．c, d は任意に取れるから

$$U \begin{pmatrix} e^\pi & 1 \\ 1 & e^\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\pi & 1 \\ 1 & e^\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$U \begin{pmatrix} e^\pi & 1 \\ -1 & -e^\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} e^\pi & 1 \\ -1 & -e^\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．これは

$$U \begin{pmatrix} e^\pi e^{i\alpha} + 1 & e^\pi e^{i\alpha} + 1 \\ e^\pi + e^{i\alpha} & -(e^\pi + e^{i\alpha}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\pi e^{i\alpha} + 1 & i(e^\pi e^{i\alpha} + 1) \\ e^\pi + e^{i\alpha} & -i(e^\pi + e^{i\alpha}) \end{pmatrix}$$

を意味する．これより

$$U = \begin{pmatrix} e^{\pi}e^{i\alpha}+1 & i(e^{\pi}e^{i\alpha}+1) \\ e^{\pi}+e^{i\alpha} & -i(e^{\pi}+e^{i\alpha}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\pi}e^{i\alpha}+1 & e^{\pi}e^{i\alpha}+1 \\ e^{\pi}+e^{i\alpha} & -(e^{\pi}+e^{i\alpha}) \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{-1}{2(e^{\pi}e^{i\alpha}+1)(e^{\pi}+e^{i\alpha})} \begin{pmatrix} e^{\pi}e^{i\alpha}+1 & i(e^{\pi}e^{i\alpha}+1) \\ e^{\pi}+e^{i\alpha} & -i(e^{\pi}+e^{i\alpha}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(e^{\pi}+e^{i\alpha}) & -(e^{\pi}e^{i\alpha}+1) \\ -(e^{\pi}+e^{i\alpha}) & e^{\pi}e^{i\alpha}+1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2(e^{\pi}e^{i\alpha}+1)(e^{\pi}+e^{i\alpha})} \begin{pmatrix} (1+i)(e^{\pi}e^{i\alpha}+1)(e^{\pi}+e^{i\alpha}) & (1-i)(e^{\pi}e^{i\alpha}+1)^2 \\ (1-i)(e^{\pi}+e^{i\alpha})^2 & (1+i)(e^{\pi}e^{i\alpha}+1)(e^{\pi}+e^{i\alpha}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(1+i)}{2} & \frac{(1-i)}{2}\cdot\frac{(e^{\pi}e^{i\alpha}+1)}{(e^{\pi}+e^{i\alpha})} \\ \frac{(1-i)}{2}\cdot\frac{(e^{\pi}+e^{i\alpha})}{(e^{\pi}e^{i\alpha}+1)} & \frac{(1+i)}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{e^{\pi}e^{i\alpha}+1}{e^{\pi}+e^{i\alpha}} \\ \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{e^{\pi}+e^{i\alpha}}{e^{\pi}e^{i\alpha}+1} & \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

と決定される．□

さて, P_{α}^{-1} が存在するときは $P_{\alpha}^2 = H(U_{\alpha})$ から,

$$H(U_{\alpha})^{-1} = P_{\alpha}^{-2}$$

の関係が得られる．P_{α}^{-1} の積分核 $k(x,t)$ から P_{α}^{-2} の積分核は

$$K(x,y) = \int_0^1 k(x,t)k(t,y)dt$$

と分かる．P_{α}^{-2} にトレースの公式を適用すれば, 無限和が得られることになる．$k(x,t)$ は簡単に求めることが出来る.

5-3 補題

$\alpha \neq 0$ のとき, P_{α}^{-1} は存在して

$$P_{\alpha}^{-1}v(x) = \int_0^1 k(x,t)v(t)dt, \quad k(x,t) = \begin{cases} \frac{ie^{i\alpha}}{e^{i\alpha}-1} & (0 < t \leq x < 1) \\ \frac{i}{e^{i\alpha}-1} & (0 < x \leq t < 1) \end{cases}$$

である.

次の無限和の公式が得られる．これは通常, 複素解析の結果から導かれる.

5-4 定理

$\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ とするとき,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\beta+n)^2} = \left\{ \frac{\pi}{\sin(\pi\beta)} \right\}^2$$

が成り立つ.

5-5 証明

両辺とも周期 1 の関数なので $0 < \beta < 1$ で示せば良い. $\alpha = 2\pi\beta$ とおく. $0 < \alpha < 2\pi$ である. P_α のスペクトルは固有値のみで $\{\alpha + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}\}$ であることが容易に確かめられる. ゼロは固有値でないので, P_α^{-2} が存在して, そのスペクトルは固有値のみで $\{(\alpha+2\pi n)^{-2}; n \in \mathbb{Z}\}$ である. P_α^{-2} に対してトレースの公式を適用する.

$$\frac{4\pi^2}{(\alpha+2\pi n)^2} = \frac{1}{(\beta+n)^2}$$

と補題 5.3 より,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\beta+n)^2} = 4\pi^2 \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\alpha+2\pi n)^2} = 4\pi^2 \int_0^1 K(x,x)dx$$

$$= 4\pi^2 \iint_{0<t<x<1} k(x,t)k(t,x)dxdt + 4\pi^2 \iint_{0<x<t<1} k(x,t)k(t,x)dxdt$$

$$= 4\pi^2 \iint_{0<t<x<1} \frac{ie^{i\alpha}}{e^{i\alpha}-1} \cdot \frac{i}{e^{i\alpha}-1} dxdt + 4\pi^2 \iint_{0<x<t<1} \frac{i}{e^{i\alpha}-1} \cdot \frac{ie^{i\alpha}}{e^{i\alpha}-1} dxdt$$

$$= \frac{-4\pi^2 \cdot e^{i\alpha}}{(e^{i\alpha}-1)^2} = \frac{-4\pi^2 \cdot e^{i2\pi\beta}}{(e^{i2\pi\beta}-1)^2} = \left\{ \frac{\pi}{\sin(\pi\beta)} \right\}^2$$

が得られる. □

6．ゼータ特殊値の積分表示

P_α^{-2} にトレースの公式を適用することで, よく知られた無限和の公式を得ることが出来た. 同様に, ディリクレラプラシアン H(境界条件:$u(0) = u(1) = 0$) を用いて, $H^{-n} (n \in \mathbb{N})$ にトレースの公式を適用して, ゼータ関数の特殊値

$$\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$$

の積分表示を与えることが出来る.

6-1 定理

n を自然数とするとき

$$\zeta(2n)=\pi^{2n}n!\int_{0<x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_n<1}\cdots\int k(x_1,x_2)k(x_2,x_3)\cdots k(x_{n-1},x_n)k(x_n,x_1)dx_1\cdots dx_n$$

が成り立つ．ここで

$$k(x,y)=\begin{cases}x(1-y) & (0<x\leq y<1)\\ y(1-x) & (0<y\leq x<1)\end{cases}$$

である．

$n=1$ のときは

$$\pi^{2\cdot 1}1!\int_{0<x_1<1}k(x_1,x_1)dx_1=\pi^2\int_0^1 x(1-x)dx=\frac{\pi^2}{6}$$

と理解する．

6-2 証明

ディリクレラプラシアン H の固有値は $\{(\pi k)^2;k\in\mathbb{N}\}$ であるから，H^{-1} の固有値は $\{(\pi k)^{-2};k\in\mathbb{N}\}$ であり，その積分核は $k(x,y)$ である [(4),(7)]．これより H^{-n} の固有値は $\{(\pi k)^{-2n};k\in\mathbb{N}\}$ であり，その積分核は，フビニの定理を用いて，

$$K(x_1,x_{n+1})=\int_{I^{n-1}}k(x_1,x_2)k(x_2,x_3)k(x_3,x_4)\cdots k(x_n,x_{n+1})dx_2dx_3\cdots dx_n$$

であることが分かる．よって H^{-n} にトレースの公式を適用して

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\pi k)^{-2n}=\int_0^1 dx_1K(x_1,x_1)$$

となる．ここで $k(x,y)=k(y,x)$ であることに注意すれば，再びフビニの定理より

$$\int_0^1 dx_1K(x_1,x_1)=\int_{I^n}k(x_1,x_2)k(x_2,x_3)k(x_3,x_4)\cdots k(x_n,x_1)dx_1dx_2dx_3\cdots dx_n$$

$$=n!\int_{0<x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_n<1}\cdots\int k(x_1,x_2)k(x_2,x_3)\cdots k(x_{n-1},x_n)k(x_n,x_1)dx_1\cdots dx_n$$

となる．□

７．結論と展望

トレースの公式を用いることによって，今まで主に複素解析からしか得られなかった種々の公式が統一的に得られたことは驚きである．さらに，ゼータ関数の特殊値の積分表示など，数論への応用も見出すことが出来た．今後は，コンパクト多様体上のラプラシアンに対して同様の考察を行い，新しい無限和の公式を探りたい．また，トレースの公式を一般化し，奇数に対するゼータ関数の値の積分表示を求めることを目標としていきたい．

参考文献

(1) J.Weidmann,“Linear Operators in Hilbert Spaces”, Springer, Berlin, Heidelberg (1980).

(2) Eskin, G.,“Lectures on Linear Partial Differential Equations”, American Mathematical Society, (2010).

(3) 溝畑　茂,「積分方程式入門」, 朝倉書店, (1968).

(4) 小林俊公, 島田伸一,「境界条件から得られる無限和の性質」, 摂南大学融合科学研究所論文集, 第７巻, 第１号 (2021), 45-59.

(5) 小林俊公, 島田伸一,「2 次元固有空間をもつ線分上のラプラシアンのスペクトルの性質と正の固有値の逆数和」, 摂南大学融合科学研究所論文集, 第 8 巻, 第 1 号 (2022), 75-114.

(6) 横田一郎,「群と位相」, 裳華房, (1971).

(7) 宮島静雄,「関数解析」, 横浜図書, (1999).