

研究論文

時空間的相関を考慮した
小地域不動産価格インデックスのベイズ MCMC 推定

植 杉 大

House Price Index in Small Areas with Bayesian MCMC Estimation
Based on Spatio-Temporal Correlation

Dai Uesugi

要 旨

本論文は、小地域における不動産価格インデックスなどの不動産価格情報を推計・集約する技術開発を行う上で必要なアルゴリズムを提案することを目的としている。具体的には、不動産価格推定において頻繁に利用されるヘドニック価格法に基づき、時空間相関を考慮した状態空間モデルを構築したうえで、係数パラメータのベイズ MCMC 推定を行うアルゴリズムを示す。これを通じて、特にこれまで推定が困難とされてきた小地域（丁目区分）に細分化された不動産価格インデックスを推定する方法を提案する。

1 はじめに

本研究は、小地域における不動産価格インデックスを推定し、これを広く地域における不動産開発・投資・購入に利用することで、不動産市場特有の情報の非対称性を解消し、もって地域不動産価格の安定化に資する情報システムの構築を目指している。

我が国の不動産価格情報は、公的なものとして、国土交通省による『地価公示』、各都道府県による『地価調査』、国税庁による『相続税路線価』、各市町村による『固定資産税路線価』が存在する。加えて民間のものとして、日本不動産研究所による『市街地価格指数』、リクルートの『リクルート住宅価格指数(RRPI)』、ニッセイ基礎研究所・三友システム不動産金融研究所による『東京圏地価インデックス』などがある。直近では、国土交通省による「日本版ケース&シラー住宅価格指数(仮称)」なども開発されている¹。さらに、価格情報と並んで、各種不動産投資インデックスの開発も行われている。住宅・不動産市場のコントロールは、リーマンショックあるいは現在の米国の住宅優遇政策を見るまでもなく政策的にも重要であり、われわれ国民の生活の基盤である。さらに最近の動向として、海外投資家の国内不動産投資が本格化しつつある。したがって、その情報には透明性・普遍性などが確保される必要があり、情報利用者が適切に利用できるよう配慮がなされるべきである。

それに反し、現実的には、我が国の不動産価格情報は信頼性に欠けるといわれて久しい。上記の不動産価格情報は、鑑定価格ベース、募集価格ベース、成約価格ベースと、それぞれそのデータソースを異にしている。内外の多くの研究から、鑑定価格には一般に鑑定バイアスが存在することが示されている²。また、市場価格動向を把握するためには成約価格情報の取得が必要だが、レインズ情報は現状開示されておらず、その取得は非常に困難である。さらに、データ制約の故、大都市圏や広域圏に関するマクロな不動産価格動向の推定しかできないという弱点もある。実際に不動産購入を行う人々や不動産開発を行うデベロッパーにとっては、詳細な「小地域における不動産価格インデックス」こそ最も必要としている情報である。

インデックス推定の方法にも、いくつかの問題が存在する。

1. 推定方法について

インデックス推定方法は、大別してヘドニック価格法に基づく推定、リピートセールス法に基づく推定に分けられる。特に米国の景気動向指標の一つとされる『ケース&シラー住宅価格指数』は、リピートセールス法によって推定される³。しかし、米国のように取引価格取得が比較的簡単に行えず、中古市場が未成熟である我が国の事情から、リピートセー

¹ 国土交通省が早稲田大学に委託して開発されたものであり、日本初のリピートセールス法によって作成された不動産価格指数である。

² 不動産市場における価格情報の歪みについては、西村・清水(2002)が詳しい。

³ ヘドニック価格法及びリピートセールス法に基づくインデックス作成方法の違いについては、Shiller(2007)を参照のこと。

ルス法は国内の不動産価格動向を把握するためには不適切との見方がある⁴。

2. 各時点における係数パラメータの挙動

不動産価格がその属性の価格の束によって形成されているならば、つまりヘドニック価格法に従うならば、各属性の価格を表す係数パラメータが時系列的に一定という仮定は不適切である。また各時点で係数パラメータを推定する構造非制約型モデルの場合、推定パラメータの各時点の挙動が不自然であることが多い⁵。

3. 小地域を対象とした推定

小地域における不動産価格インデックス推定は、データ収集自体が困難であり、また一地域あたりにおけるデータ量も少ないなど、信頼できる推定が極めて困難である。

以上の困難性を克服し、不動産価格情報として必要とされる『小地域不動産価格インデックス』を作成するため、本論文では、推定モデルとしてヘドニックアプローチに基づく状態空間モデルを採用した。これは、係数パラメータの時系列的挙動を遷移方程式を通じてモデル化する「可変係数回帰モデル (time-varying coefficients regression model)」として知られるものである。また、各係数パラメータは物件属性の価格であるので、地域ごとに推定されたパラメータ間で空間的相関をもつことが予想される。これを明示的にモデル化するため、状態空間モデルの遷移方程式において空間計量経済学における空間自己相関モデル(Spatial Autoregressive Model:SAR model)を援用し、地域固有のパラメータどうしの相関を考慮したモデルを構築した。さらに、推定方法として、近年注目はされはじめているが不動産に係る実証分析ではまだあまり用いられていないベイズ MCMC (Markov Chain Monte Carlo) 法を採用した⁶。

第 2 節では、推定モデルの構成を説明する。特に地域ごとのパラメータ推定を行うことから観察方程式及び遷移方程式の構成が複雑となるため、それを詳しく説明した。第 3 節では、状態空間モデルにおける状態変数たる係数パラメータの求め方であるカルマンフィルター及び状態平滑化の公式を紹介する。第 4 節では、他の推定パラメータの条件付き事後分布を求め、第 3 節において説明された係数パラメータと併せて、ベイズ MCMC 法による推定のアルゴリズムと地域不動産価格インデックスの作成方法の概略を示す。第 5 節では、本論文のまとめと今後の課題を示す。

⁴ 日本における数少ないリポートセールス法による住宅価格指数の推計を行った例として、原野・清水・唐渡・中川(2007)がある。また前述した国土交通省による日本版ケース&シラー指数については、国土交通省のホームページ http://www.mlit.go.jp/report/press/sogo16_hh_000030.html を参照のこと。

⁵ この点についての対処法の例としては、清水・唐渡(2007)第 6 章を参照のこと。

⁶ 空間計量経済学の分野ではベイズ MCMC と最尤法等との推定パフォーマンスの比較等が行われ、空間相関パラメータに関してベイズ MCMC 推定が利用されている。例えば、Lesage and Pace(2009)を参照のこと。また、地球統計学におけるクリギングを空間相関のモデル化に応用し、ベイズ MCMC 推定を行っている実証研究として、Clapp, Kim and Gelfand(2002)がある。

2 推定モデル

ここでは、観測方程式としてヘドニック価格法に基づく推定式、及び遷移方程式として各回帰係数パラメータの時空間的相関を考慮した式を組み合わせた状態空間モデルを提示する。

本論文で用いるモデルは、一般に可変係数回帰モデル (time-varying coefficients regression model) と呼ばれるものである。このモデルは状態空間モデルの一種であり、回帰係数パラメータが時点ごとに異なり、遷移方程式における第 t 時点の回帰係数パラメータがランダムウォーク過程に従って変動すると仮定されるモデルである。

それでは始めに、観測方程式を定式化する。

第 j 地域における t 時点での観測値 i は以下のように表現できる。ここで、

$1 \leq j \leq J, 1 \leq t \leq T, 1 \leq i \leq N_{jt}$ かつ $N_t = \sum_{j=1}^J N_{jt}$ とする。

$$y_{ijt} = \beta_{jt}^1 + \beta_{jt}^2 x_{ijt}^2 + \beta_{jt}^3 x_{ijt}^3 + \dots + \beta_{jt}^M x_{ijt}^M + \varepsilon_{ijt} \quad (1)$$

ここで y_{ijt} は、第 j 地域における t 時点での i 番目の物件価格である。また、 x_{ijt}^m は、第 j 地域における t 時点での i 番目の物件に係る m 番目の属性データである。属性データとしては、都心からの時間距離、最寄駅からの時間距離、物件面積や鉄道沿線ダミーなどが考えられる。 β_{jt}^m は、第 j 地域における t 時点での m 番目の属性に係る推定パラメータである。

上記の式を行列表示にするために、以下の行列を導入する。

$$\mathbf{y}_{jt} = \begin{pmatrix} y_{1jt} \\ \vdots \\ y_{N_{jt}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_{jt} = \begin{pmatrix} 1 & x_{1jt}^2 & \dots & x_{1jt}^M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N_{jt}}^2 & \dots & x_{N_{jt}}^M \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{jt} = \begin{pmatrix} \beta_{jt}^1 \\ \vdots \\ \beta_{jt}^M \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{jt} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1jt} \\ \vdots \\ \varepsilon_{N_{jt}} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{ijt} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

さらに、以下の行列を導入する。

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_{jt} = \begin{pmatrix} u_{1jt} \\ \vdots \\ u_{N_{jt}jt} \end{pmatrix}$$

$$u_{ijt} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

すると上記の式は、以下のような行列表記の式にまとめられる。

$$\mathbf{y}_{jt} = \mathbf{X}_{jt}\boldsymbol{\beta}_{jt} + \mathbf{g}\mathbf{u}_{jt} \quad (2)$$

さらに行列表示を簡便化するために、以下の行列を導入する。

$$\mathbf{Y}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{1t} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{Jt} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{1t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_{2t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{X}_{Jt} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_{1t} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_{Jt} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{g} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{g} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{g} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{1t} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{Jt} \end{pmatrix}$$

最終的に、(2)式は以下のようにまとめられる。

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{X}_t \boldsymbol{\beta}_t + \mathbf{G} \mathbf{u}_t \quad (3)$$

以上が観測方程式である。

次に、遷移方程式について記述する。観測方程式では、不動産の属する地域間における相関を考慮するとともに、通常の変数回帰モデルに従い、各係数パラメータがランダム・ウォーク過程に従うものと仮定する。例えばパラメータ β_{t+1}^1 の場合は、以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \beta_{1,t+1}^1 &= \rho w_{1,2}^1 \beta_{2,t+1}^1 + \rho w_{1,3}^1 \beta_{3,t+1}^1 + \cdots + \rho w_{1,J}^1 \beta_{J,t+1}^1 + \beta_{1t}^1 + \eta_{1t}^1 \\ \beta_{2,t+1}^1 &= \rho w_{2,1}^1 \beta_{1,t+1}^1 + \rho w_{2,3}^1 \beta_{3,t+1}^1 + \cdots + \rho w_{2,J}^1 \beta_{J,t+1}^1 + \beta_{2t}^1 + \eta_{2t}^1 \\ &\vdots \\ \beta_{J,t+1}^1 &= \rho w_{J,1}^1 \beta_{1,t+1}^1 + \rho w_{J,2}^1 \beta_{2,t+1}^1 + \cdots + \rho w_{J,J-1}^1 \beta_{J-1,t+1}^1 + \beta_{Jt}^1 + \eta_{Jt}^1 \end{aligned}$$

したがって、以下のようにまとめることができる。

$$\boldsymbol{\beta}_{t+1}^1 = \rho \mathbf{W}^1 \boldsymbol{\beta}_{t+1}^1 + \boldsymbol{\beta}_t^1 + \boldsymbol{\eta}_t^1 \quad (4)$$

ここで、

$$\boldsymbol{\beta}_t^1 = \begin{pmatrix} \beta_{1t}^1 \\ \vdots \\ \beta_{Jt}^1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\eta}_t^1 = \begin{pmatrix} \eta_{1t}^1 \\ \vdots \\ \eta_{Jt}^1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W}^1 = \begin{pmatrix} 0 & w_{1,2}^1 & \cdots & w_{1,J}^1 \\ w_{2,1}^1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & w_{J-1,J}^1 \\ w_{J,1}^1 & \cdots & w_{J,J-1}^1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。特に \mathbf{W}^1 はある地域と隣接する他の地域との関係を示すウェイト行列である。このウェイト行列は、一般的に空間計量経済学⁷の推定モデルにおいて用いられるものであり、対角要素は 0、隣接する他の地域が n 個あれば、対応する要素が各 $\frac{1}{n}$ と設定される行列である。ま

⁷ 空間計量経済学に及びそのベイズ推定に関しては、Hepple(1995a,b)、および LeSage and Pace(2009)を参照のこと。

た、 ρ はスカラーであり、地域ごとの相関関係の強さを表すパラメータである⁸。

さらに、 $\boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{d}_t \mathbf{u}_t$ とすることができる。ここで、

$$\mathbf{d}_t = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{12} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_{1J} \end{pmatrix}$$

である。

次に、以下の行列を定義する。

$$\mathbf{B}_t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_t^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_t^M \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{W}^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{W}^M \end{pmatrix}$$

ただし、 $\mathbf{W}^1 = \cdots = \mathbf{W}^M$ とする。また、

$$\boldsymbol{\eta}_t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_t^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}_t^M \end{pmatrix}$$

は、さらに以下のように表現できる。

$$\boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{D} \mathbf{u}_t$$

ここで、

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{d}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{d}_M \end{pmatrix}$$

である。それによって、遷移方程式は以下のようにあらわすことができる。

$$\mathbf{B}_{t+1} = \rho \mathbf{W} \mathbf{B}_{t+1} + \mathbf{B}_t + \mathbf{D} \mathbf{u}_t \quad (5)$$

⁸ これは時系列分析でいうところの、一次の自己相関係数に相当するものである。

ここで、以下の行列を導入する。

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{S}\boldsymbol{\beta}_t \tag{6}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & & & & & \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

この行列 \mathbf{S} は $\boldsymbol{\beta}_t$ を \mathbf{B}_t に変換する行列であり、行列要素を並び替えるための、いわば sort matrix である。

(6)式を用いると、(5)式は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{S}\boldsymbol{\beta}_{t+1} &= \rho\mathbf{W}\mathbf{S}\boldsymbol{\beta}_{t+1} + \mathbf{S}\boldsymbol{\beta}_t + \mathbf{D}\mathbf{u}_t \\ (\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})\mathbf{S}\boldsymbol{\beta}_{t+1} &= \mathbf{S}\boldsymbol{\beta}_t + \mathbf{D}\mathbf{u}_t \\ \boldsymbol{\beta}_{t+1} &= \{(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})\mathbf{S}\}^{-1}\mathbf{S}\boldsymbol{\beta}_t + \{(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})\mathbf{S}\}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{u}_t \end{aligned}$$

ここで、

$$\mathbf{T} = \{(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})\mathbf{S}\}^{-1}\mathbf{S}$$

$$\mathbf{H} = \{(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})\mathbf{S}\}^{-1}\mathbf{D}$$

とすると、最終的に遷移方程式は以下のようにまとめられる。

$$\boldsymbol{\beta}_{t+1} = \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_t + \mathbf{H}\mathbf{u}_t \tag{7}$$

3 カルマンフィルター及び状態平滑化

本節では、係数パラメータの推定に必要なカルマンフィルターおよび状態平滑化を行うために必要な式を示す。カルマンフィルターは t 期までの情報をもとに $t + 1$ 期の状態変数(ここでは各係数パラメータ)を予測するシステムとして非常に有名である。また状態平滑化とは、 T 期までの全情報に基づいて各 t 期の状態変数を推定する方法である。状態平滑化を行う上で、カルマンフィルターを事前に行う必要があるため、以下では、まずカルマンフィルターの実行方法を説明し、その後状態平滑化の実行方法を示す。

便宜上、状態空間モデルの観測方程式(3)式、及び遷移方程式(7)式を再掲する。

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_t &= \mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta}_t + \mathbf{G}\mathbf{u}_t \\ \boldsymbol{\beta}_{t+1} &= \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_t + \mathbf{H}\mathbf{u}_t \end{aligned}$$

はじめに、状態空間モデルにおけるカルマンフィルターは以下の関係から求められる。なお、 \mathcal{Y}_t は t 期までの情報集合を表すものとする。

$$\begin{aligned}\beta_t | \mathcal{Y}_{t-1} &\sim \mathcal{N}(\hat{\beta}_t, \mathbf{P}_t) \\ \mathbf{Y}_t | \mathcal{Y}_{t-1} &\sim \mathcal{N}(\mathbf{X}_t \hat{\beta}_t, \mathbf{P}_t) \\ \beta_t | \mathcal{Y}_t &\sim \mathcal{N}(\hat{\mu}_t, \hat{\Sigma}_t)\end{aligned}$$

$$\hat{\beta}_{t+1} = \begin{cases} \mathbf{T}\beta_0 & (t=0) \\ \mathbf{T}\hat{\beta}_t + \mathbf{K}_t \mathbf{e}_t & (t \geq 0) \end{cases} \quad (8)$$

$$\mathbf{P}_{t+1} = \begin{cases} \mathbf{H}\mathbf{H}' & (t=0) \\ \mathbf{T}\mathbf{P}_t \mathbf{L}'_t + \mathbf{H}\mathbf{J}'_t & (t \geq 0) \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_t &= \hat{\beta}_t + \mathbf{P}_t \mathbf{X}'_t \mathbf{X}_t^{-1} \mathbf{e}_t \\ \hat{\Sigma}_t &= \mathbf{P}_t - \mathbf{P}_t \mathbf{X}'_t \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{X}_t \mathbf{P}_t\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_t &= \mathbf{Y}_t - \mathbf{X}_t \hat{\beta}_t \\ \mathbf{K}_t &= (\mathbf{T}\mathbf{P}_t \mathbf{X}'_t + \mathbf{H}\mathbf{G}') \mathbf{D}_t^{-1} \\ \mathbf{D}_t &= \mathbf{X}_t \mathbf{P}_t \mathbf{X}'_t + \mathbf{G}\mathbf{G}' \\ \mathbf{L}_t &= \mathbf{T} - \mathbf{K}_t \mathbf{X}_t \\ \mathbf{J}_t &= \mathbf{H} - \mathbf{K}_t \mathbf{G}_t\end{aligned}$$

である。

次に、状態平滑化の公式は以下のとおりである。

$$\beta_t | \mathcal{Y}_T \sim \mathcal{N}(\hat{\beta}_t, \mathbf{Q}_t)$$

$$\hat{\beta}_t = \begin{cases} \hat{\mu}_T & (t=T) \\ \hat{\mu}_t + \mathbf{J}_t^* (\tilde{\beta}_{t+1} - \hat{\beta}_{t+1}) & (t < T) \end{cases} \quad (10)$$

$$\mathbf{Q}_t = \begin{cases} \hat{\Sigma}_T & (t=T) \\ \hat{\Sigma}_t + \mathbf{J}_t^* (\mathbf{Q}_{t+1} - \mathbf{P}_{t+1}) \mathbf{J}_t^{*'} & (t < T) \end{cases} \quad (11)$$

$$\mathbf{J}_t^* = \mathbf{P}_t \mathbf{L}'_t \mathbf{P}_{t+1}^{-1}$$

となる⁹。

⁹ 本節のカルマンフィルターおよび状態平滑化の公式については、中妻(2003)に準拠した。証明は中妻(2003)あるいは Durbin and Koopman(2001)がわかりやすい。

4 ベイズ MCMC によるパラメータ推定のアルゴリズムとインデックスの作成

前節までの結果をもとに、本節では状態空間モデルのベイズ MCMC 推定のアルゴリズムを示す。

残っている推定されるべきパラメータは、観測方程式の誤差項の分散パラメータ σ_ε^2 、遷移方程式の誤差項の分散パラメータ $\sigma_\beta^2 = \sigma_{\beta_m}^2, 1 \leq m \leq M, 1 \leq j \leq J$ 、及び空間的自己相関を表すパラメータ ρ である。

$\mathcal{B}_T = \{\beta_t\}_{t=1}^T$ とする。全期間にわたるデータ \mathcal{Y}_T と状態変数 \mathcal{B}_T の同時確率分布は、

$$p(\mathcal{Y}_T, \mathcal{B}_T | \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\beta^2, \rho) = \prod_{t=1}^T p(\mathbf{Y}_t | \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\beta^2, \rho, \mathcal{B}_T) \times p(\beta_1 | \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\beta^2, \rho) \prod_{t=1}^{T-1} p(\beta_{t+1} | \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\beta^2, \rho, \beta_t)$$

となる。ここで、

$$p(\mathbf{Y}_t | \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\beta^2, \rho, \mathcal{B}_T) \propto (\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} (\mathbf{Y}_t - \mathbf{X}_t \beta_t)' (\mathbf{Y}_t - \mathbf{X}_t \beta_t)\right]$$

$$p(\beta_{t+1} | \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\beta^2, \rho, \beta_t) \propto |\Omega|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{A}\beta_{t+1} - \mathbf{S}\beta_t)' \Omega^{-1} (\mathbf{A}\beta_{t+1} - \mathbf{S}\beta_t)\right]$$

$$p(\beta_1 | \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\beta^2, \rho) \propto |\Omega_0|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{A}\beta_1 - \mathbf{S}\beta_0)' \Omega_0^{-1} (\mathbf{A}\beta_1 - \mathbf{S}\beta_0)\right]$$

である。また $\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \rho \mathbf{W})\mathbf{S}$ 、 $\Omega = \mathbf{D}\mathbf{D}'$ である。事前分布をそれぞれ、 $p(\sigma_\varepsilon^2)$ は逆ガンマ分布 $\mathcal{G}_a^{-1}(v_0/2, \lambda_0/2)$ 、 $p(\Omega)$ は逆ウィシャート分布 $\mathcal{W}^{-1}(v_0, \Omega_0)$ 、 $p(\rho)$ は一様分布 $\mathcal{U}(-1, 1)$ に従うものと仮定する。

状態変数 \mathcal{B}_T が与えられた場合、

$$p(\mathcal{Y}_T | \sigma_\varepsilon^2, \mathcal{B}_T) \propto (\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{T}{2}} \exp\left(-\frac{\sum_{t=1}^T (\mathbf{Y}_t - \mathbf{X}_t \beta_t)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right)$$

となるから、 σ_ε^2 の条件付き事後分布は、逆ガンマ分布

$$\sigma_\varepsilon^2 | \mathcal{Y}_T, \mathcal{B}_T \sim \mathcal{G}_a^{-1}\left(\frac{v_0 + T}{2}, \frac{\lambda_0 + \sum_{t=1}^T (\mathbf{Y}_t - \mathbf{X}_t \beta_t)^2}{2}\right) \quad (12)$$

となる。

次に、 $\beta_1 \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Omega)$ を仮定すれば、

$$p(\beta_1 | \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\beta^2, \rho) \propto |\Omega|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{A}\beta_1)' \Omega^{-1} (\mathbf{A}\beta_1)\right]$$

となり、尤度関数は、

$$p(\mathcal{B}_T | \Omega, \rho) \propto |\Omega|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \text{tr} \Omega^{-1} \{(\mathbf{A}\beta_1)' (\mathbf{A}\beta_1) + (\mathbf{A}\beta_{t+1} - \mathbf{S}\beta_t)' (\mathbf{A}\beta_{t+1} - \mathbf{S}\beta_t)\}\right]$$

なので、 Ω の条件付き事後分布は、逆ウィシャート分布

$$\Omega | \rho, \mathcal{B}_T \sim \mathcal{W}^{-1}(v_0 + T, \Omega_0 + (\mathbf{A}\beta_1)(\mathbf{A}\beta_1)' + \sum_{t=1}^{T-1} (\mathbf{A}\beta_{t+1} - \mathbf{S}\beta_t)(\mathbf{A}\beta_{t+1} - \mathbf{S}\beta_t)') \quad (13)$$

となる¹⁰。

さらに ρ の条件付き事後分布の確率密度関数を $p(\rho|\Omega, B_T)$ とすると、

$$p(\rho|\Omega, B_T) \propto |\mathbf{A}| \exp\left[-\frac{1}{2}\{(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}_1)'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}_1) + \text{tr}((\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}_{t+1} - \mathbf{S}\boldsymbol{\beta}_t)'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}_{t+1} - \mathbf{S}\boldsymbol{\beta}_t))\}\right]$$

と表すことができるが、式を一見すればわかるように、 ρ に関する確率密度関数を整理するのは困難である。したがって、 ρ の条件付き事後分布から直接 ρ の乱数を生成することが難しいので、メトロポリス-ヘイスティング・アルゴリズム(M-H アルゴリズム)を使うことにする。

M-H アルゴリズムに基づくサンプリングを行うためには、 ρ の候補となる値を発生させるための提案分布が必要である。その候補となる値を ρ^* とする。一方候補の値と比較される現在の値を ρ^c とする。すると、M-H アルゴリズムの採択確率は、

$$\alpha(\rho^c, \rho^*) = \min\left\{\frac{p(\rho^*|\Omega, B_T)}{p(\rho^c|\Omega, B_T)}, 1\right\} \quad (14)$$

として与えられる。ここでは、Holloway, Shankara, and Rahman(2002)によって提案された tuned random-walk procedure に従い、提案分布として正規分布を用いる。候補となる値は、以下の式により発生させるとする。

$$\rho^* = \rho^c + c \times \mathcal{N}(0, 1) \quad (15)$$

c を tuning parameter という。tuning parameter の決定方法は、一般に試行錯誤を要するものであり、 ρ の収束の様子をモニタリングしながら任意に決定することとなる。

以上で、時空間的相関を考慮した状態空間モデルのパラメータ推定に関するアルゴリズムを示すことができる。最後に一連の推定アルゴリズムをコンパクトにまとめてみよう。

1. $\boldsymbol{\beta}^{(0)}$ 、 $\sigma_\varepsilon^{2(0)}$ 、 $\boldsymbol{\Omega}^{(0)}$ 、 $\rho^{(0)}$ を決める。
2. iter=1,2,...に対して次を繰り返す。
 - (a) (10)(11)式より、状態変数 $\boldsymbol{\beta}_t^{(iter)}|\sigma_\varepsilon^{2(iter-1)}, \boldsymbol{\Omega}^{(iter-1)}, \rho^{(iter-1)} \mathcal{Y}_T$ を発生させる。
 - (b) (12)式より、 $\sigma_\varepsilon^{2(iter)}|\boldsymbol{\beta}_t^{(iter)}, \boldsymbol{\Omega}^{(iter-1)}, \rho^{(iter-1)}, \mathcal{Y}_T$ を発生させる。
 - (c) (13)式より、 $\boldsymbol{\Omega}^{(iter)}|\boldsymbol{\beta}_t^{(iter)}, \sigma_\varepsilon^{2(iter)}, \rho^{(iter-1)}, \mathcal{Y}_T$
 - (d) はじめに、適当な tuning parameter c を定める。次に、(15)式により候補の値 ρ^* を求める。その後、現在の値 ρ^c とともに(14)式に代入し、採択確率を求める。最後に、 $\mathcal{U}(0, 1)$

¹⁰ tr は行列のトレース(対角要素の和)を表している。また(13)式を導出するために、 $\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B} + \mathbf{A})$ や $\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A})$ という性質を利用している。

から乱数 \tilde{u} を発生させ、以下の基準で棄却か採択かを決定する。

$$\begin{aligned} \tilde{u} \leq \alpha(\rho^c, \rho^*) &\rightarrow \rho^{(iter)} = \rho^* \\ \tilde{u} > \alpha(\rho^c, \rho^*) &\rightarrow \rho^{(iter)} = \rho^c \end{aligned}$$

3. 十分大きな N に対して $\beta^{(iter)}$ 、 $\sigma_e^{2(iter)}$ 、 $\Omega^{(iter)}$ 、 $\rho^{(iter)}$ 、 $iter = N, N+1, \dots$ を記録する。

最後にインデックスの作成について述べる。はじめに典型的な戸建物件を想定して、その属性データと上記アルゴリズムにより推定された β_{jt} の平均値との線形結合により、各地域における典型物件の理論価格を求める。基準時点を 100 として、他の時点の価格水準を求めることによりインデックスを作成するものとする。

5 まとめと今後の課題

本論文では、近年パラメータ推定方法として注目されているベイズ MCMC 推定を通じて、時空間的相関を考慮した小地域不動産価格インデックスを作成するアルゴリズムを提案した。

推定モデルの構築という点では、これまでの不動産価格推定の 2 つの難点、ヘドニックモデルにおける係数パラメータの時系列的挙動の問題、およびパラメータ間における空間的相関の問題を状態空間モデルを通じて折衷した点は推定モデルの独自性として評価されるものと考えられる。

信頼できるデータ取得が可能であれば、本論文で提案した推定が実現されることによって、小地域ごとに固有の不動産価格インデックスが継続的に示され、地域的な不動産価格動向の様子や、昨今問題となっている地域内での価格二極化を把握することができる。これらは、不動産価格インデックスの利用可能性を示唆するものであり、例えば、住宅需要者が不動産を購入する際の価格指標となる、住宅ローン融資の際の融資判断の材料となる、デベロッパー等が不動産開発に的確な地域を選択する判断材料となるなど、不動産市場参加者の情報基準となることによって、ひいては地域不動産市場の安定化に資するものと考えられる。

本論文を通じての最終的な目標は、小地域における不動産インデックスの継続的な公表を行い、当該地域の不動産価格の安定化と市場の透明性を実現することにある。そのためには推定モデルの構築及び推定方法の確立のみならず、必要なデータ収集デザインも併せて研究を行う必要性を感じる。これに必要な段階は大きく分けて 3 つある。(1) クローラ¹¹を利用して(募集)価格情報を周期的に Web から収集し、自動的にデータベース化するプログラムの開発、(2) 本論文で示した不動産価格インデックス推定モデルの開発と、そのプログラムの開発、(3) 逐次 Web ページ上でその情報が公開・更新されるプログラムの開発、などが挙げられよう。また、集約されたインデックス情報を Web ページを通じてヴィジュアル化する方法も併せて検討す

¹¹ クローラとはインターネットの Web 上にある文書や画像などを周期的に修得し、自動的にデータベースを作成するプログラムのことを言う。一般に検索エンジンのデータベースなどの作成に用いられるものである。

る必要がある。さらに、これら一連の作業の自動化を行うためのパッケージ開発を検討する必要があるかもしれない。

推定に必要な情報収集のデザイン及び不動産価格インデックスの推定、並びにその公表・更新という一連のパッケージを開発することを通じて、小地域における不動産開発、不動産投資・購入情報を充実させ、不動産市場の情報の非対称性問題を軽減することができるものとする。

これらの点については今後の課題としたい。

参考文献

Clapp, J. M., Kim H. J. and Gelfand A.E.(2002), “Spatial Prediction of House Price Using LPR and Bayesian Smoothing,” *Real Estate Economics*, 30:4, pp.505-532

Durbin, J. and Koopman, S. J.(2001), “Time Series Analysis by State Space Methods,” Oxford University Press.

Hepple, L.W.(1995a), “Bayesian techniques in spatial and network econometrics:1.Model Comparison and posterior odds,” *Environment and Planning A*,27,pp.447-469.

Hepple, L.W.(1995b), “Bayesian techniques in spatial and network econometrics: 2. Computational methods and algorithms,” *Environment and Planning A*,27,pp.615-644.

Holloway, G.,B.Shankara and S.Rahman(2002), “Bayesian spatial probit estimation: s primer and an application to HYV rice adoption,” *Agricultural Economics*,27:3,pp.383-402.

LeSage, J.P.and Pace, R.K.(2009), “Introduction to Spatial Econometrics,” CRC Press.

Shiller, R.J.(2007), “Macro Markets,” Oxford University Press.

清水千弘・唐渡広志(2007), 『不動産市場の計量経済分析』, 朝倉書店.

中妻照雄(2003), 『ファイナンスのための MCMC 法によるベイズ分析』, (財)三菱経済研究所.

西村清彦・清水千弘(2002), 地価情報の歪み: 「取引事例と鑑定価格の誤差」, 西村清彦編『不動産市場の経済分析』第2章, 日本経済新聞社.

原野啓・清水千弘・唐渡広志・中川雅之(2007), 「レポートセールス法による品質調整済住宅価格指数の推計」, 季刊住宅土地経済, 2007 年夏季号, pp.12-19.